9 Stochastische Modelle und Methoden

9.1 Grundbegriffe und Grundlagen
(Erinnerung)

9.1.1 Zufallsvariable und ihre Charakterisierung

- Eindimensionale (numerische) ZV Y
  mathematisches Modell einer numerischen Größe,
  - die in der Realität wiederholt beobachbar;
  - deren Wert über Beobachtungen (potentiell) variiert;
  - bei der gewisse Regelmäßigkeiten des Variierens
    zu erwarten: liegt Menge von Beobachtungen vor,
    dann liegen Beobachtungswerte
    mit bestimmten relativen Häufigkeiten
    in bestimmten Intervallen

- Gesetzmäßigkeiten des Variierens der **Zufallsvariablen** Y
  erfaßt durch deren **Verteilung**
  legt fest: für jedes Werte-Intervall I=(u,o]
  Wahrscheinlichkeit P[Y I]
  mit der **Realisierung** von Y im Intervall I
  statistische Interpretation:
  Intervall-Wahrscheinlichkeiten
  Modell der (erwarteten) relativen Häufigkeiten

- Viele Möglichkeiten, Verteilung einer ZV Y
  vollständig und sparsam zu charakterisieren:
  - Menge Wahrscheinlichkeiten / Verteilungsdichte
  - Verteilungsfunktion
  - Menge Momente / Zentralmomente
  - diverse Transformierte
    generierende Funktion
    Laplace-Transformierte …

- Axiomatische Fundierung (Kolmogorov)

- Sei
  Ω' Menge von Elementarereignissen ω' Ω'
  A' über Ω' definierte σ-Algebra von Ereignissen a' A'
  $P':A' \rightarrow [0,1]$ auf A' definiertes (auf 1 normiertes) Maß,
  genannt: **Wahrscheinlichkeitsmaß**
  dann heißt
  Maßraum (Ω',A',P') **Wahrscheinlichkeitsraum**

- Sei ferner
  Ω Bildmenge von Elementen ω Ω
  A über Ω definierte σ-Algebra von Elementen a A

  dann heißt
  jede A'-A-meßbare Abbildung
  $Y: \Omega' \rightarrow \Omega$ **Zufallsvariable**
  und (induziertes) Bildmaß
  $P=Y(P')$ **Verteilung** von Y

  P (auch: PY) ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf A,
  für a A gilt $PY(a) = P[Y \; a]$
  für Wahrscheinlichkeit, daß Y a

- Ist insbesondere
  $\Omega = \mathbf{R}^1$ Menge der reellen Zahlen
  $A = B^1$ σ-Algebra der Borelschen Mengen des $\mathbf{R}^1$
  dann heißt eine A'-B^1-meßbare Abbildung
  $Y: \Omega' \rightarrow \mathbf{R}^1$ **reelle Zufallsvariable**

- Anwendungen
  arbeiten (gerne) völlig im Bildraum (Ω,A,P)
  zB Würfeln (Standardbeispiel)
  Bearbeitungsdauern (Abschn. 6.3)
  Bestellmengen (Abschn. 8.4)

- Verteilung reeller ZV Y (Bildmenge $\mathbf{R}^1$)

- charakterisierbar durch **Verteilungsfunktion**
  $F_Y(y) := P[Y \leq y] \qquad y \quad \mathbf{R}^1$

- **diskrete** (reelle) ZV Y nehmen Werte y_k aus endlicher / abzählbarer Wertemenge an:
  $\{y_k \,;\, k=0,1,\ldots\}$
  - ° zugehörige Wahrscheinlichkeiten
    $p_k := P[Y=y_k]$ ($= P_Y(y_k)$) $\quad k=0,1,\ldots$
    charakterisieren Verteilung (PMF, Probabiliy Mass
  - ° Verteilungsfunktion Function)

    $$F_Y(y) = \sum_{y_k \leq y} p_k$$

    ist reine Treppenfunktion
  - ° Intervallwahrscheinlichk'n aus beiden Charakterisier'gn

    $$P[\,Y \quad (u,o]\,] = \sum_{y_k \quad (u,o]} p_k$$

    bzw $\qquad = F_Y(o) - F_Y(u)$

- **kontinuierliche** (reelle) ZV Y nehmen Werte y aus Wertekontinuum an (idR konvexes $\mathbf{R}^1$-Intervall)
  - ° **Verteilungsdichte**(funktion) (PDF, Probabiliy Density
    $f_Y(y) \qquad y \quad \mathbf{R}^1$ Function)
    charakterisiert Verteilung
  - ° mit Verteilungsfunktion besteht Zusammenhang

    $$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y')\, dy'$$

    bzw
    $f_Y(y) = dF_Y(y)/dy$
  - ° Verteilungsfunktion ist stetig

° Intervallwahrscheinlichk'n aus beiden Charakterisier'gn

$$P[\,Y \quad (u,o]\,] = \int_{u}^{o} fY(y')\, dy'$$

$$\text{bzw} \qquad = FY(o) - FY(u)$$

- gemeinsame Behandlung von
  diskreten, kontinuierlichen, "gemischten" ZV
  mit Hilfe Stieltjes-Integralbegriff,
  erlaubt Darstellung

$$FY(y) = \int_{-\infty}^{y} dFY(y')$$

$$P[\,Y \quad (u,o]\,] = \int_{u}^{o} dFY(y')$$

• **Erwartungswert** einer ZV Y definiert als

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y'\, dFY(y')$$

$$\text{diskret} \qquad = \sum_{y_k \quad (-\infty,\infty)} y_k\, p_k$$

$$\text{kontinuierlich} \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} y'\, fY(y')\, dy'$$

Erwartungswert einer Funktion g(Y) einer ZV Y als

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y')\, dFY(y')$$

$$\text{diskret} \qquad = \sum_{y_k \quad (-\infty,\infty)} g(y_k)\, p_k$$

$$\text{kontinuierlich} \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} g(y')\, fY(y')\, dy'$$

- Erwartungswerte der Funktionen
  $g(Y) = Y^k$ k=1,2,…
  heißen (k-te) **Momente**

$$\mu_k := E\left[Y^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y'^k \, dFY(y') \qquad k=1,2,...$$

- Erwartungswerte der Funktionen
  $g(Y) = (Y-E[Y])^k$ k=2,3,…
  heißen (k-te) **Zentralmomente**
  $E[(Y-E[Y])^k]$ k=2,3,…

- existieren alle k-ten Momente k=1,2,… , einer ZV, dann charakterisieren sie Verteilung eindeutig

- oft Beschränkung auf partielle Charakterisierungen
  - ° Teilmenge Momente / Zentralmomente
  - ° aus diesen abgeleitete Kenngrößen

  - ° 1. Moment — Erwartungswert E[Y]
  - ° 2. Zentralmoment — **Varianz** V[Y]
    $V[Y] := E[(Y-E[Y])^2]$
  - ° Wurzel 2. Zentralmoment — **Streuung** σ[Y]

    $\sigma[Y] := +\sqrt{V[Y]}$

  - ° relative Streuung — **Variationskoeffizient** VK[Y]
    $VK[Y] := \sigma[Y] / E[Y]$

  - ° uam

9.1.2 Stochastische Prozesse

statt: einzelne ZV

jetzt: Menge zusammengehöriger ZV,
"Familie" von ZV

Mitglieder der Familie unterschieden durch Index t,
in geordneter Indexmenge T variierend:

$(Y_t)_{t\ \ T}$ oder auch: $(Y(t);t\ \ T)$ oä

alle Y_t als Abbildungen definiert
- aus derselben Menge von Elementarereignissen
- auf denselben Wertebereich Ω
- samt ihrer Verteilungen (Wahrscheinlichkeits-Maße) P_t

T: "Parametermenge"
Ω: "Zustandsraum" des Prozesses

"Zusammengehörigkeit" der Familie (Y_t):
- Realisierungen (y_t) "simultan entstehend", aus **einem** Elementarereignis resultierend
- jedes Elementarereignis σ impliziert Abbildung $t \rightarrow y_t(\sigma)$, $T \rightarrow \Omega$

Ist gar nicht so kompliziert:

- Beispiel:
- $\Omega=\mathbf{R^+}$, $T=\mathbf{R^+}$ gewählt
- Realisierungen des Prozesses betrachtet
  (Realisierungen aller ZV der Familie)
  für zwei Elementarereignisse σ_1, σ_2

- zu jedem Elementarereignis (σ_1 und σ_2)
  gehört Realisierung stochastischer Prozeß
  ($y_t(\sigma_1)$ und $y_t(\sigma_2)$),
  die gemeinsame Realisierung aller beteiligten ZV,
  die Abbildung T $\rightarrow$ Ω ($\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$)
- häufigste Interpretation Parametermenge T ist "Zeit",
  damit Realisierung stochastischer Prozeß
  Verlauf seines Zustands (aus $\mathbf{R}^+$) über der Zeit,
  auch "Trajektorie"

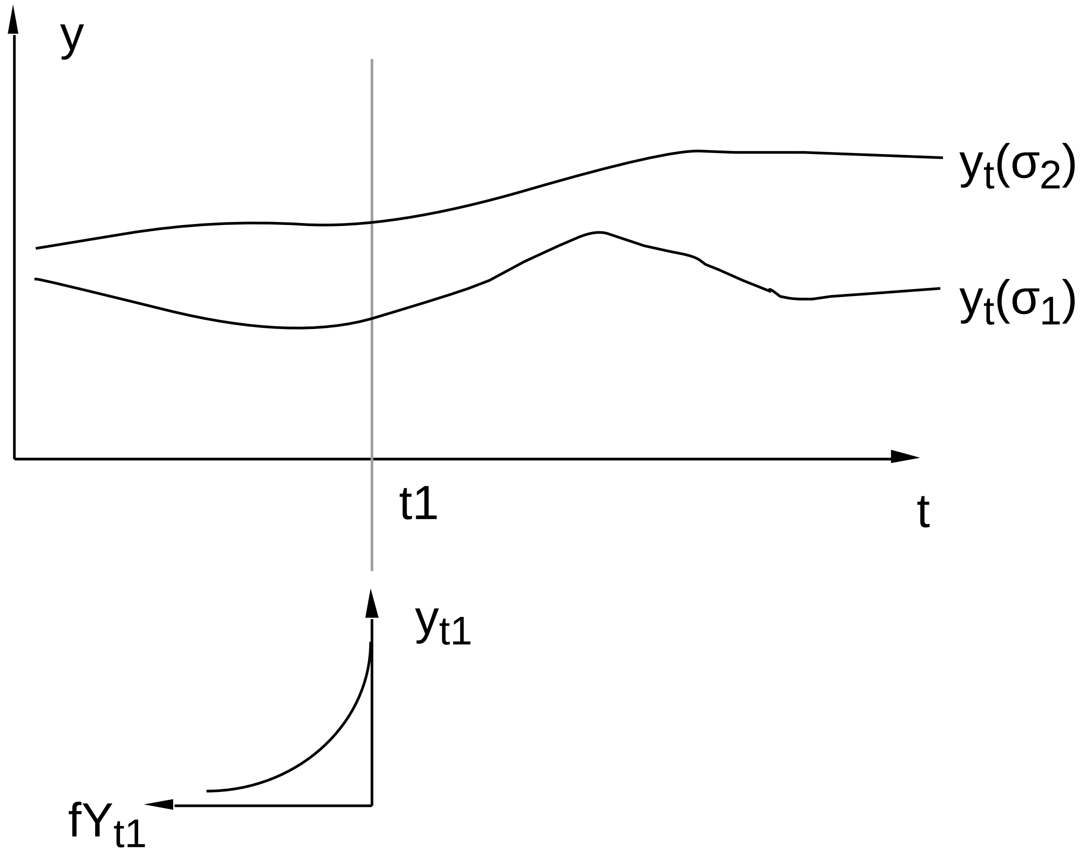


Abbildung 9.1.01 : Trajektorien stochastischer Prozeß, Zustandsverteilung zu festem Zeitpunkt

- für festen Beobachtungszeitpunkt t (t_1)
  ("quer" über alle Trajektorien / möglichen Z'Verläufe)
  Zufallsvariable Y_{t1} : Verteilung z.B. wie Dichtefunktion
- anderer Zeitpunkt $t_2 \neq t_1$: andere ZV Y_{t2}, andere Verteil'g.
- Y_{t1} und Y_{t2} aber **abhängig**: **ein** Elementarereignis !

bei praktischen Anwendungen
- Bezug zu Elementarereignissen meist unterdrückt
- Bewegung völlig im Zustandsraum Ω

Klassifizierungen stochastischer Prozesse bezüglich

(a) der Natur des Zustandsraums Ω,
häufig betrachtete Fälle
$\Omega = \mathbf{N}_0$ (zustandsdiskreter Prozeß)
$\Omega = \mathbf{R}^+$ (zustandskontinuierlicher Prozeß)

(b) der Natur der Parametermenge T,
häufig betrachtete Fälle
$T = \mathbf{N}_0$ (zeitdiskreter Prozeß)
$T = \mathbf{R}^+$ (zeitkontinuierlicher Prozeß)

(c) der Art der Abhängigkeiten der Zufallsvariablen $(Y_t)_{t \quad T}$,
erfaßbar durch "gemeinsame Verteilung",
z.B. gemeinsame Verteilungsfunktion ($\tau \quad T$, $r=|\tau|$)

$$F\mathbf{Y}(\mathbf{t}_\tau , \mathbf{y}_\tau) = P[Y(t_1)\leq y_1, Y(t_2)\leq y_2, \ldots, Y(t_r)\leq y_r]$$

"kompaktere" Abhängigkeitscharakterisierungen gefragt

Einige (sehr unterschiedliche) Abhäng.Charakterisierungen:

Definition 9.1.02 : Unabhängige Prozesse

Grenzfall **keinerlei** Abhängigkeiten,
Familie **unabhängiger** ZV,
für abzählbares $\tau \quad T$

$$F\mathbf{Y}(\mathbf{t}_\tau , \mathbf{y}_\tau) = \prod_{t \quad \tau} FY_t(y_t)$$

Definition 9.1.03 : Stationäre Prozesse

Zeit-Invarianz der Abhängigkeiten, formal:
Für alle τ T, und alle s>0   ("sinnvoll")

gilt: $F\mathbf{Y}(\mathbf{t}_\tau , \mathbf{y}_\tau) = F\mathbf{Y}(\mathbf{t}_\tau+\mathbf{s} , \mathbf{y}_\tau)$ wo $\mathbf{s}=(s,s,...,s)^T$

insbesondere, für $|\tau|=1$:

alle ZV $Y(t_i)$, t_i τ, identisch verteilt (nicht: unabhäng. !)

Definition 9.1.04 : Markovsche Prozesse

Unabhängigkeit von Vergangenheit, formal:
Für alle $\tau = \{t_i ; i \quad I\} \quad T$

und $t^*:=\max(t_i ; i \quad I)$

und beliebiges t   T mit $t>t^*$

gilt: $FY(t \mid \mathbf{Y}(\mathbf{t}_\tau)=\mathbf{y}_\tau) = FY(t \mid Y(t^*)=y^*)$

"gegenwärtiger Zustand sagt alles über Zukunft":

"**Gedächtnislosigkeit**"

Ab jetzt: Konzentration auf

Markov-Prozesse
/ Semi-Markov-Prozesse (Def "später")

9.1.3 Markov-Ketten mit diskreter Parametermenge
Discrete Time Markov Chains: DTMCs

- Sei

  $(Y_t)_t \;\; T$ stochastische **Kette**, Zustandsraum $\Omega=\mathbf{N}_0$
  T ihre Parametermenge T,
  diskret, speziell $T=\mathbf{N}_0$

  Darstellung der Kette auch als
  $(Y_n)_{n=0,1,...}$

  Kette besitze Markov-Eigenschaft,
  im vorliegenden Falle ausdrückbar als

  $$P[Y_n=i_n \mid Y_{n-1}=i_{n-1},...,Y_0=i_0] = P[Y_n=i_n \mid Y_{n-1}=i_{n-1}]$$
  $$n\geq 1,\ i_j \;\; \mathbf{N}_0,\ j \;\; [0..n]$$

- Größen (bedingte Wahrscheinlichkeiten)

  $$\pi_{ij}(n-1,n) := P[Y_n=j \mid Y_{n-1}=i] \qquad n\geq 1;\ i,j \;\; \mathbf{N}_0$$

  heißen (1-Schritt-) **Übergangswahrscheinlichkeiten**

- Größen (totale Wahrscheinlichkeiten)

  $$p_i(n) := P[Y_n=i] \qquad i,n \;\; \mathbf{N}_0$$

  heißen (zeitabhängige) **Zustandswahrscheinlichkeiten**

- Zusammenhang zwischen p.(.) und π.(.,.) offensichtlich

(9.1.05a) $$p_j(n) = \sum_{i \;\; \mathbf{N}_0} p_i(n-1) \;\; \pi_{ij}(n-1,n) \qquad n\geq 1;\ j \;\; \mathbf{N}_0$$

- sind die Übergangswahrscheinlichkeiten stationär (zeitunabhängig), also

  $$\pi_{ij}(n-1,n) \equiv \pi_{ij} \qquad n \geq 1;\ i,j \quad \mathbf{N}_0$$

  heißt die Kette (zeit-)**homogen**
  und aus (9.1.05a) wird

  $$p_j(n) = \sum_{i \quad \mathbf{N}_0} p_i(n-1) \quad \pi_{ij} \qquad n \geq 1;\ j \quad \mathbf{N}_0$$

  bzw. in Vektor/Matrix-Schreibweise
  (**p**: Zustandsvektor, Π: Übergangsmatrix)

(9.1.05b) $\mathbf{p}^T(n) = \mathbf{p}^T(n-1) \cdot \Pi$

- für homogene Ketten sind auch die
  m-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

  $$\pi_{ij}^{(m)} := P[Y_{n+m}=j \mid Y_n=i] \qquad m \geq 2$$

  zeitunabhängig, da aus (9.1.05b) folgt daß

  $$\begin{aligned} \mathbf{p}^T(n+m) &= \mathbf{p}^T(n+m-1) \cdot \Pi \\ &= (\ \mathbf{p}^T(n+m-2) \cdot \Pi\ ) \cdot \Pi = \ldots \\ &= \mathbf{p}^T(n) \cdot \Pi^{\,m} \end{aligned}$$

  und für die **m-Schritt-Übergangsmatrix** $\Pi^{(m)}$ gilt, daß

  $$\Pi^{(m)} = \Pi^{\,m}$$

  sowie, verallgemeinernd, die
  Chapman-Kolmogorov-Beziehungen (gerafft / detailliert)

(9.1.06a) $\Pi^{(n+m)} = \Pi^{\,(n)} \cdot \Pi^{\,(m)}$

(9.1.06b) $\pi_{ij}^{(n+m)} = \sum_k \pi_{ik}^{(n)} \quad \pi_{kj}^{(m)}$

- der Vollständigkeit halber (konsistent mit Definitionen)
  $\Pi^{(1)} = \Pi \qquad \Pi^{(0)} = I$ (Einheitsmatrix)

- mit (9.1.05/.06) lassen sich,
  startend mit der
  Anfangsverteilung $\qquad \mathbf{p}(0)$,

  die zeitabhängigen,
  transienten Zustandswahrscheinlichkeiten
  $\mathbf{p}(n) \quad n=1,2,\ldots$
  ermitteln (numerisch nur bei endlichem Z'Raum)

- Gleichung (9.1.05b) wirft naheliegende Frage auf,
  ob Verteilungen $\mathbf{p}(n)$ gegen Grenzverteilung

  $$\mathbf{p} := \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n)$$

  streben, so daß
  Zust'ds-Wahrsch'n Prozeß für große n beschrieben
  durch (zeitunabhängige) Grenzverteilung

  bei Existenz ergäbe sich Grenzverteilung,
  gemäß (9.1.05b), als Lösung Gleichungssystem

(9.1.07) $\quad \mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \, \Pi \qquad \sum_i p_i = 1$

Grenzverteilung heißt (bei Existenz) auch
Gleichgewichtsverteilung,
da Prozeß bei Wahl der Anfangsverteilung
$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$
stationär (Stationarität auch möglch
ohne Existenz Grenzverteilung)

→ **Wann existiert** (höchst interessante) **Grenzverteilung** ??

- Markov-Kette heißt **irreduzibel**,
  wenn jeder Zustand
  sich von jedem anderen Zustand
  erreichen läßt:

$$i,j \quad \mathbf{N}_0 : (\quad m_{ij} : \pi_{ij}^{(m_{ij})} > 0)$$

- sei Wahrscheinlichkeit, von Zustand i aus
  in genau m Schritten
  Zustand j zu erreichen

  $f_{ij}^{(m)}$:= P[Zustand j wird von Zustand i aus erstmals nach m Schritten erreicht]

  und Wahrscheinlichkeit, von Zustand i aus
  in genau m Schritten
  in Zustand zurückzukehren

  $f_{jj}^{(m)}$:= P[erste Rückkehr in Zustand j geschieht nach m Schritten]

  dann ist Wahrscheinlichkeit,
  jemals wieder zurückzukehren

$$f_{jj} := P[\text{Rückkehr in Zustand } j] = \sum_{m=1}^{\infty} f_{jj}^{(m)}$$

→ Klassifizierung Zustände

$f_{jj}=1$ Zustand j heißt **rekurrent**

$f_{jj}<1$ Zustand j heißt **transient**

bei Rückkehr nur nach r>1 Schritten
d.h. $f_{jj}^{(m)}=0$ für m<r
Zustand j heißt **periodisch** mit Periode r,

sonst Zustand j heißt **aperiodisch**

- in rekurrente Zustände kehrt Prozeß nach (im Mittel) M_{jj} Schritten zurück, wo

$$M_{jj} := \sum_{m=1}^{\infty} m \quad f_{jj}^{(m)}$$

→ Klassifizierung Zustände

$M_{jj}=\infty$ Zustand j heißt **null-rekurrent**

$M_{jj}<\infty$ Zustand j heißt **positiv rekurrent**

→ Klassifizierung Ketten

sind sämtliche Zustände einer Kette aperiodisch

(periodisch, positiv rekurrent, null-rekurrent)

dann heißen Ketten aperiodisch

(periodisch, rekurrent, null-rekurrent)

aperiodische, rekurrente Ketten heißen **ergodisch**

- für rekurrente, irreduzible Ketten gilt, neben Definitionsbedingung $f_{jj}=1$, daß für alle Zustandspaare (i,j)

$$f_{ij} := \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} = 1$$

Satz 9.1.08 : Zustände irreduzibler DTMC

In irreduzibler Markov-Kette sind
entweder alle Zustände transient
oder alle null-rekurrent
oder alle positiv rekurrent.
Falls Periodizität vorliegt, alle Zustände identische Perioden r

oB

→ bei Überprüfung irreduzibler Kette
auf Eigenschaften (wird interessieren!)
genügt Überprüfung eines Zustands
auf Periodizität, Rekurrenz, Ergodizität

Satz 9.1.09 : Konvergenzbedingungen DTMC

Für eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette
existieren die Grenzwahrscheinlichkeiten

$$p_j := \lim_{n \to \infty} p_j(n) \quad j \quad \mathbf{N}_0$$

und sind unabhängig von der Anfangsverteilung.

Zusätzlich sind
entweder

- alle Zustände transient
  oder alle Zustände null-rekurrent,
  in welchen Fällen sich
  $$p_j = 0 \quad j \quad \mathbf{N}_0$$
  ergibt und keine Grenzverteilung existiert

oder

- alle Zustände positiv rekurrent, in welchem Falle die
  $$p_j \quad j \quad \mathbf{N}_0$$
  eine stationäre Verteilung charakterisieren.
  In diesem Falle ist auch
  $$p_j = 1/M_{jj} \quad j \quad \mathbf{N}_0$$
  und die p_j ergeben sich eindeutig aus Gleichungssystem
  $$p_j = \sum_i p_i \ \pi_{ij}$$
  $$\sum_j p_j = 1$$
  \- dies ist genau Gleichung (9.1.07) - oB

ungemein hilfreich (Überprüfungen können uU entfallen):

Satz 9.1.10 : Ergodizität DTMC

Eine irreduzible, aperiodische Kette
ist genau dann positiv rekurrent,
wenn das Gleichungssystem $\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \Pi$
eine Lösung besitzt mit $\Sigma\, p_j = 1$

oB

9.1.4 Markov-Ketten mit kontinuierlicher Parametermenge
Continuous Time Markov Chains: CTMCs

- Zeitkontinuierliche Markov-Ketten besitzen

  - kontinuierlichen Parameterraum
  - diskreten Zustandsraum
  - typisch für Anwendungen: $(\Omega,T) = (\mathbf{N}_0,\mathbf{R}^+)$

- Markov-Eigenschaft formal:

  für alle $n \geq 1$
  und für alle Folgen $t_1<t_2<...<t_n<t_{n+1}$ gilt:

$$P[Y(t_{n+1})=i_{n+1}|Y(t_1)=i_1,...,Y(t_n)=i_n]$$
$$= P[Y(t_{n+1})=i_{n+1}|Y(t_n)=i_n]$$
$$t_i \quad \mathbf{R}^+;\ i_j \quad \mathbf{N}_0,\ j=1,2,...,n+1$$

- Prozeßzustand zu festem t
  beschrieben durch Verteilung der ZV Y(t),
  durch **Zustandswahrscheinlichkeiten**

$$p_i(t) := P\left[X(t)=i\right] \qquad i \quad \mathbf{N}_0$$
$$\sum_i p_i(t) = 1$$

- für unterschiedliche Zeitpunkten t_1,t_2 (sei $t_1<t_2$):
  abhängige Zustandsverteilungen

  herrsche Zustand i zum Zeitpunkt t_1
  - Wahrscheinlichkeit für Zustand zum Zeitpunkt t_2 ?
    von Vor-Zustand i abhängig
  - mit dieser Abhängigkeit aber Abhängigkeit
    von gesamter "Vorgeschichte" (bis t_1) erfaßt
    (Markov-Eigenschaft!)

- Abhängigkeitsstruktur sinnvoll durch (Zustands-)**Übergangswahrscheinlichkeiten** erfaßbar

$$\pi_{ij}(t_1,t_2) := P[Y(t_2)=j|Y(t_1)=i] \qquad t_2>t_1;\ t_1,t_2 \quad \mathbf{R}^+;\ i,j \quad \mathbf{N}_0$$

$$\sum_j \pi_{ij}(t_1,t_2) = 1 \qquad i \quad \mathbf{N}_0$$

- Zusammenhang zwischen p.(.) zu Zeitpunkten t_1 und t_2 und π.(.,.) offensichtlich:

(9.1.11) $$p_j(t_2) = \sum_{i \quad \mathbf{N}_0} p_i(t_1) \quad \pi_{ij}(t_1,t_2) \qquad t_2>t_1, j \quad \mathbf{N}_0$$

- Übergangswahrscheinlichkeiten bisher sehr allgemein: Abhängigkeitsstruktur darf sich über der Zeit ändern, ist für jedes Paar (t_1,t_2) spezifisch

  sehr viel einfacherer Fall:
  Abhängigkeitsstruktur **zeitinvariant**
  praktisch sehr relevanter Fall
  (Gesetze der Dynamik
  eines arbeitenden Systems ia konstant)

  bei Betrachtung der Zeitpunkten (t_1,t_2)
  - absolute Lage t_1 unerheblich,
  - nur noch Differenz t_2-t_1 maßgeblich

→ **(zeit-)homogener Markov-Prozeß**

Abhängigkeitsstruktur homogenen Prozesses erfaßt (für alle t) durch Übergangswahrscheinlichkeiten (Umbenennung!)

(9.1.12a) $\pi_{ij}(s) := P[Y(t+s)=j|Y(t)=i] \qquad s>0;\ i,j\ \ \mathbf{N}_0$

(9.1.12b) $\sum_j \pi_{ij}(s) = 1 \qquad i\ \ \mathbf{N}_0$

und aus (9.1.11)

(9.1.13a) $p_j(t+s) = \sum_{i\ \ \mathbf{N}_0} p_i(t)\ \ \pi_{ij}(s) \qquad t, s > 0;\ j\ \ \mathbf{N}_0$

- mit Schreibvereinfachung (Vektor-/Matrix-Form)
  $\Pi(s) := (\pi_{ij}(s)\ ;\ i,j\ \ \mathbf{N}_0)$ Matrix Übergangsw'n
  $\mathbf{p}(t) := (p_j(t)\ ;\ j\ \ \mathbf{N}_0)$ Spaltenvektor Zust'dsw'n

  kompakte Form

(9.1.13b) $\mathbf{p}^T(t+s) = \mathbf{p}^T(t) \cdot \Pi(s)$

- mit expliziter Form für Übergangswahrsch'n $\Pi(s)$ (erhältlich!) sind aus beliebigen Start-Zustandsverteilungen $\mathbf{p}(0)$ (zeitabhängige) Zustandsverteilungen für ZV Y(t) gemäß

(9.1.14) $\mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(0) \cdot \Pi(t)$

errechenbar (mühsam!)

- statt dessen unmittelbar (vgl. DTMCs):

  - Zustandsverteilung t von
    Start-Zustandsverteilung $\mathbf{p}(0)$ abhängig

  - vernünftig, zu vermuten, daß Abhängigkeit
    "mit der Zeit" (t wachsend) abnimmt,
    "für gewisse Systeme" verschwindet

- falls zutreffend, dann
  alle Übergangsw'n $\pi_{ij}(t)$, i $\mathbf{N}_0$
  für große t zum selben Wert konvergierend !
  Matrix $\Pi(t)$ für große t
  Matrix Π mit identischen Zeilen zustrebend

mit (9.1.14) auch

(9.1.15) $\lim\limits_{t \to \infty} p_j(t) = p_j \quad j \quad \mathbf{N}_0$

Prozeß mit t "stationär. Verhalten" zustrebend (s. Def.)

- falls Grenzverteilung $\mathbf{p} := (p_j; j \quad \mathbf{N}_0)$ gemäß (9.1.15) existierend, dann wie folgt bestimmbar:

aus (9.1.13) **E** Einheitsmatrix

$$\mathbf{p}^T(t+s) - \mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(t) \cdot (\Pi(s) - \mathbf{E})$$

$$\frac{\mathbf{p}^T(t+s) - \mathbf{p}^T(t)}{s} = \mathbf{p}^T(t) \quad \frac{\Pi(s) - \mathbf{E}}{s}$$

und im Grenzübergang $s \to 0$

(9.1.16a)
$$\frac{d\mathbf{p}^T(t)}{dt} = \mathbf{p}^T(t) \quad \lim_{s \to 0} \frac{\Pi(s) - \mathbf{E}}{s}$$
$$= \mathbf{p}^T(t) \quad \mathbf{Q}$$

wo Matrix $\mathbf{Q} = (q_{ij} \,; i,j \quad \mathbf{N}_0)$ mit Elementen

(9.1.16b)
$$q_{ij} = \lim_{s \to 0} \left[\pi_{ij}(s)/s\right] \qquad i \neq j$$
$$q_{ii} = \lim_{s \to 0} \left[(\pi_{ii}(s) - 1)/s\right]$$

- unsere Vermutung:

  für große t Prozeßverhalten → stationäres Verhalten

$\mathbf{p}(t)$	de facto zeitunabhängig,
$d\mathbf{p}(t)/dt$	de facto verschwindend

  aus (9.1.16) für hinreichend große t

(9.1.17a) $\mathbf{0}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{Q}$

(9.1.17b) $\sum_{i \;\; \mathbf{N}_0} p_i = 1$

- lineares Gleichungssystem (9.1.17) direkt nutzbar

  - um aus Q (Matrix, deren Elemente alle Informationen über Charakteristika speziellen Prozesses, also konkreten Problems, enthalten)

  - "stationäre Verteilung" **p** des Prozesses zu bestimmen, d.h. Wahrscheinlichkeiten p_j, j $\mathbf{N}_0$, Prozeß für große t in seinen Zuständen anzutreffen (unabhängig von t und Start-Z'd)

- Überlegungen basieren auf Prämisse, daß stationäre Verteilung (9.1.15) existiert, d.h. "unter gewissen Voraussetzungen"

  dazu folgender Satz (Wißbegierige: s. Cinl75)

Satz 9.1.18 : Konvergenzbedingungen CTMC

Zeitkontinuierliche homogene Markov- Kette
heißt **irreduzibel**,
wenn jeder Zustand von jedem Zustand "erreichbar" ist
(für alle Zustandspaare (i,j) Werte t>0, so daß $\pi_{ij}(t)>0$).

Irreduzible (zeitkontinuierliche, homogene) Markov-Kette
besitzt eindeutige stationäre Grenzverteilung (9.1.17)
genau dann, wenn (9.1.17) Lösung besitzt

oB

große praktische Bedeutung:

- wenn "stabiles" Verhalten M-Kette (System) interessant
  (→ stationäre Grenzverteilung,
  auch "eingeschwungene", "Gleichgewichts-"Phase,
  im Unterschied zu anfänglicher "transienter" Phase)

- und wenn Kette (zeit-)homogen
  (i. allg. direkt dem Problem entnehmbar)

- und wenn Kette irreduzibel
  (i. allg. direkt dem Problem entnehmbar)

- dann lediglich Gleichungssystem (9.1.17)
  aufzustellen und nach **p** zu lösen

- falls gelingend, "gewisse Voraussetzungen" für
  Existenz stationärer Grenzverteilung erfüllt,
  und diese bereits eindeutig ermittelt

praktische Durchführung:

- (9.1.17) aufstellen:
  aus gegebenem Problem Matrix **Q** ableiten

  dazu erforderlich:
  Klärung der Bedeutung der
  - in (9.1.16) nur formal eingeführten -
  Elemente q_{ij} der Matrix **Q**

- (9.1.17) lösen:
  "nur" Lösung linearen Gleichungssystems,
  allerdings mit potentiell sehr großer (bis: abzählbarer) Dimension (=Mächtigkeit des Zustandsraums)

- Fortsetzung nach

  Einschub: EXPONENTIALVERTEILUNG

  wird sich
  - als inhärent mit CTMCs "verquickt"
  - als problemseitig gut "anwendbar"

  herausstellen

EXPONENTIALVERTEILUNG (+ POISSON-PROZESS)

- kontinuierliche Zufallsvariable A (Wertemenge $\mathbf{R}^+$)

  mit Verteilungsfunktion :

(9.1.19a) $FA(a) = P[A \leq a] = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda a) & a>0 \\ 0 & a \leq 0 \end{cases}$

und positivem reellem Parameter

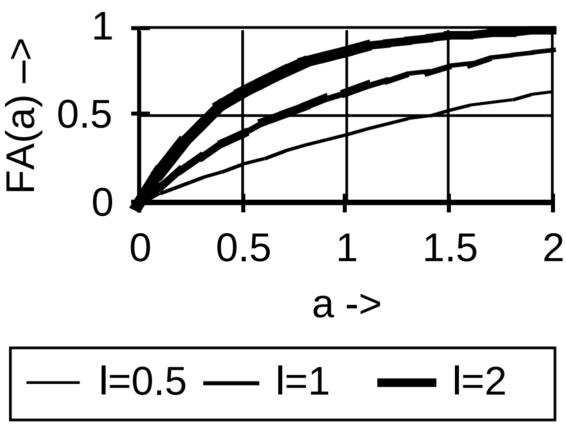
(9.1.19b) $\lambda > 0$

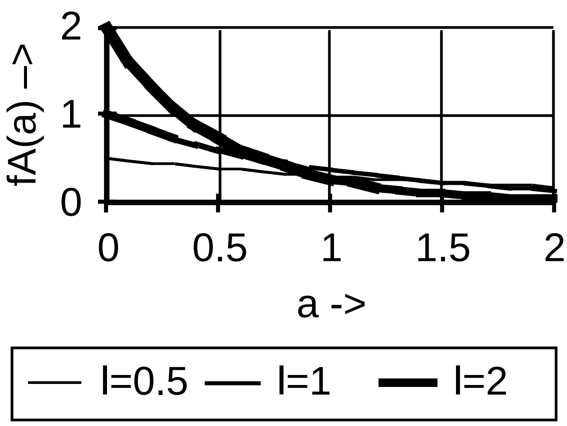
heißt (negativ) **exponentiell verteilt**

leicht ermittelbar:
Charakteristika Exponentialverteilung

(9.1.20)	Dichtefunktion	$fA(a) = \lambda \cdot \exp(-\lambda a)$
	Erwartungswert	$E[A] = 1/\lambda$
	2. Moment	$E[A^2] = 2/\lambda^2$
	Varianz	$V[A] = 1/\lambda^2$
	Variationskoeffizient	$VK[A] = 1$

Erscheinungsbild





- Betrachtung Folge von Ereignissen

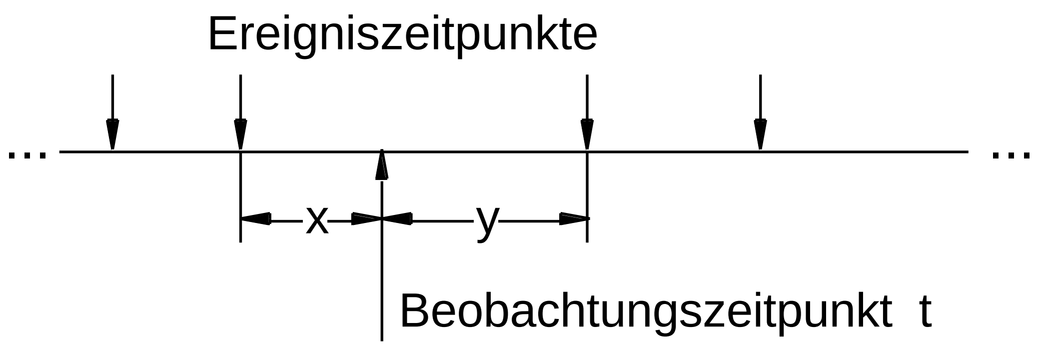
  - je zu **Ereigniszeitpunkt** $\mathbf{R}^+$ "eintretend"

  - mit **Ereignisabständen** zwischen Folgeereignissen,
    welche "zufällig lang" sind,
    durch ZV A_k erfaßt werden,
    wo alle A_k u.i. (wie ZV A) verteilt,
    und A exponentiell verteilt mit Parameter λ

- Beobachtung des **Ereignisstroms**

  - zu zufälligem Zeitpunkt t

  - mit Interesse an Zeitspanne bis zu nächstem Ereignis



x ZE nach Ereignis:
"Rest" y ist seinerseits ZV Y
charakterisiert z.B. durch
Verteilungsfunktion FY(y)

(einfachere) Betrachtung:
komplementäre Funktion 1-FY(y) = P[Y>y]
aus Diagramm:

$$
\begin{aligned}
P[Y>y] &= P[A>x+y \mid A>x] \\
&= P[A>x+y] / P[A>x] \\
&= (1-FA(x+y)) / (1-FA(x))
\end{aligned}
$$

$P[Y>y] = (1-FA(x+y)) / (1-FA(x))$

mit (9.1.19) $= \exp(-\lambda \cdot (x+y))/\exp(-\lambda x)$

$= \exp(-\lambda y)$

so daß

(9.1.21) $FY(y) = 1-P[Y>y] \quad y \geq 0$

$= 1-\exp(-\lambda y)$

$= FA(y)$

erstaunlich !!

- kein "x" in (9.1.21):
  Länge des Restes Y unabhängig davon,
  wo Beobachtungszeitpunkt t
  im Ereignisintervall lag **??**

- FY(y) = FA(y):
  Verteilung des Restes Y identisch
  mit der des gesamten Ereignisintervalls A **??**

kontra-intuitiv !!

- exponentiell verteilte ZV in dem Sinne "gedächtnislos", daß sie die Dauer ihrer Vergangenheit "vergißt"

  Gedächtnislosigkeit als Bedingung:

  nur Familie der Exponentialverteilungen ist
  in obigem Sinn gedächtnislos
  (bei kontinuierlichen ZVs)

  diskretes Gegenstück
  (wieder exklusiv, mit analoger Interpretation):
  geometrische Verteilung (Wertebereich $\mathbf{N}_0$)

- weitere interessante Verteilungen:

  Annahme:
  Ereignisstrom mit u.i. exp. Ereignisabständen
  Frage:
  wie lange dauert es von Ereignis
  bis übernächstem, drittnächstem, k-nächstem ?
  Antwort:
  Summen von 2, 3, …, k (u.i.) exp. Ereign.Abst'n "A"
  ZV A_k k = 2, 3, ...

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} A \qquad k=2,3,...$$

(Verteilung **nicht** gleich der von $k \cdot A$)
ferner (Zeit bis zur nächsten Ankunft):

$$A_1 = A$$

Ermittlung A_2 (Zeit bis übernächste Ankunft)
Verteilungsfunktion

$$FA_2(a) = P\left[A_2 \le a\right]$$
$$= \int_0^a fA_1(x)\, FA_1(a-x)\, dx$$

(9.1.19, 9.1.20) eingesetzt:

(9.1.22a)
$$FA_2(a) = \int_0^a \lambda \exp(-\lambda x)\left[1-\exp(-\lambda(a-x))\right] dx$$
$$= \int_0^a \lambda \exp(-\lambda x)\, dx - \int_0^a \lambda \exp(-\lambda a)\, dx$$
$$= 1-\exp(-\lambda a) - \lambda a \exp(-\lambda a)$$
$$FA_2(a) = 1 - (1+\lambda a) \exp(-\lambda a)$$

entsprechend für A_3:

(9.1.22b) $$FA_3(a) = \int_0^a fA_1(x)\, FA_2(a-x)\, dx$$

$$= 1 - \left(1 + \lambda a + \frac{\lambda^2 a^2}{2}\right) \exp(-\lambda a)$$

Bildungsgesetz

(9.1.22c) $$FA_k(a) = 1 - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda a)^i}{i!}\right] \exp(-\lambda a)$$

(9.1.22) beschreibt Familie "Erlang" -:
Erlang(k) -, E_k -**Verteilungen**
ZV entsteht als Summe von k u.i. exp. verteilten ZV,
Parameter: k, λ
weitere Charakteristika:

Dichtefunktion	$fA_k(a)$	$= \lambda \exp(-\lambda a) \dfrac{(\lambda a)^{k-1}}{(k-1)!}$
Erwartungswert	$E\left[A_k\right]$	$= k/\lambda$
zweites Moment	$E\left[A_k^2\right]$	$= k(1+k)/\lambda^2$
Varianz	$V\left[A_k\right]$	$= k/\lambda^2$
Variationskoeff.	$VK\left[A_k\right]$	$= 1/\sqrt{k}$

(9.1.22): Zeit **von Ereignis** bis zum k-tem folgenden

Zeit **von zufälligem** Beobachtungs**zeitpunkt**
bis k-tem folgenden Ereignis?
Entsprechend (9.1.22) !
denn: Rest Ereignisinterv. verteilt wie gesamtes Intervall !

inverse Betrachtung:
- von bestimmtem Beobachtungszeitpunkt an
- Zeitintervall fester Länge t
- wieviel Ankünfte in diesem Intervall ?
- "variierend": ZV N_t, Wertebereich $\mathbf{N}_0$

Verteilung erfaßbar durch Wahrscheinlichkeiten

$$\{ PN_t(k);\ k \quad \mathbf{N}_0 \}$$

wo aus (9.1.22):

$$\begin{aligned} P[N_t \geq k] &= P[A_k \leq t] \\ &= FA_k(t) \\ P[N_t \geq k+1] &= FA_{k+1}(t) \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} PN_t(k) &= P\left[N_t = k\right] \\ &= P\left[N_t \geq k\right] - P\left[N_t \geq k+1\right] \\ &= FA_k(t) - FA_{k+1}(t) \\ &= 1 - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}\right] \exp(-\lambda t) \\ &\qquad - \left(1 - \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]\right) \exp(-\lambda t) \end{aligned}$$

(9.1.23) $PN_t(k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) \qquad k=0,1,2,...$

Verteilungen dieser Familie:
Poisson-Verteilungen

hier: Poisson-Verteilung mit Parameterwert λt beschreibt Anzahl Ereignisse in beliebigem Intervall der Länge t für Ereignisstrom mit u.i.v. exp. (λ) Ereign.Intervallen

Unabhängig identisch exponentiell verteilte Ereignisabstände entsprechen
Poisson-verteilten Ereigniszahlen und umgekehrt
"**Poisson-Strom**"

Charakteristika Poisson-Verteilung (Parameterwert λt):

- Erwartungswert:

$$E[N_t] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, PN_t(k)$$
$$= \exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$
$$= \lambda\, t \exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

mit Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_0^{\infty} x^k/k!$$

(9.1.24) $$E[N_t] = \lambda t \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t) = \lambda t$$

- spezielle Wahrscheinlichkeiten:

(9.1.25a) $$PN_t(0) = \exp(-\lambda t) = 1 - \lambda t + (\lambda t)^2/2! - + \ldots = 1 - \lambda t + o(t)$$

wo o(t), "Funktion von kleiner Ordnung gegenüber t", definiert durch Bedingung

$$\lim_{t \to 0} o(t) / t = 0$$

für kleines t, mit hinreichender Genauigkeit:

$$PN_t(0) \approx 1-\lambda t$$

(9.1.25b) $PN_t(1) = \lambda t \cdot \exp(- \lambda t) = \lambda t + o(t)$

(9.1.25c) $P[N_t>1] = 1 - PN_t(0) - PN_t(1) = o(t)$

(9.1.25), als Bedingung gestellt,
besitzt als einzige Lösung den bekannten Poisson-Strom

folgende drei Bedingungen definieren (je für sich)
einen Poisson-Strom (treffen immer gleichzeitig zu):

- Ereignisse mit u.i.v. exponentiellen Abständen, Par. λ

- Von zufälligem Zeitpunkt aus
  Anzahl Ereignisse in Intervall der Länge t
  entsprechend Poisson-Verteilung mit Parameter λt

- Von zufälligem Zeitpunkt aus
  Wahrscheinlichkeit 0, 1, >1 Ereignisse in Interv. Länge t
  entsprechend (9.1.25)

zugrunde liegt: Eigenschaft der **Gedächtnislosigkeit**

Größe λ ist zentraler Parameter Poisson-Strom,
als "Rate" des Stroms bezeichnet, aus zwei Gründen:

- "Rate": "Anzahl von Ereignissen pro Zeiteinheit"
  Poisson-Strom, Intervall der Länge T:
  im Mittel (9.1.24) λT Ereignisse
  $\lambda T/T = \lambda$ ist Erwartungswert Ereignisrate

- (9.1.25b): Wahrscheinlichkeit,
  von beliebigem Zeitpunkt aus,
  innerhalb nächster t ZE Ereignis zu registrieren,
  wächst bei kleinem t proportional t, Prop.Konstante λ
  auch insofern: Benennung "Rate" treffend

Ende
EXPONENTIALVERTEILUNG (+ POISSON-PROZESS)

Zurück zu:
AUFSTELLUNG Q-MATRIX

- sei System (zum Zeitpunkt t) im Zustand i (Z'Raum)

- \+ zeithomogen   d.h.unabhängig von t ableitbar,
  wie Zustand s Zeiteinheiten später

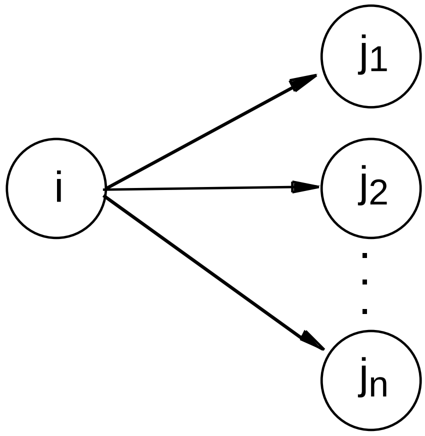
  erfaßt durch $\pi_{ij}(s)$ (9.1.12)
  bzw. für
  unmittelbare Zukunft q_{ij} (9.1.16b)

- für unmittelbar bevorstehende Zukunft
  nur unmittelbare Folgezustände relevant:

  aus Zustand i $\rightarrow j_1, j_2, \ldots, j_n$

  (ungesunde Verhältnisse
  "beliebig viele Z'Übergänge in beliebig kurzer Zeit"
  als praxisfern ausgeschlossen)

- somit Interesse auf (Ausschnitt von)
  Zustandsübergangsgraph



Knoten: Zustände
Kanten: mögliche unmittelbare Zustandsübergänge

- (bis auf weiteres) einfacher:
  genau ein unmittelbaren Folgezustand: j_1
  Zustand i zu t
  Zustand j_1 zu s+t mit (bed.)Wahrsch. $\pi_{i,j1}(s)$

- mit (gedachter) Reihenentwicklung für $\pi_{i,j1}(s)$ auch

(9.1.26) $\pi_{i,j1}(s) = q_{i,j1} \cdot s + o(s)$

$q_{i,j1}$ "Übergangsintensität", "Zustandsübergangsrate"

alle q_{ij} mit $j \neq j_1$ (bzgl. nicht unmittelbarer Folgezustände)
sollten Wert 0 haben, zugeordnete $\pi_{ij}(s)=o(s)$ sein,
Zustände $j \neq j_1$ in erster Näherung
(für kleine s de facto) nicht auftauchen

Hauptdiagonalelement q_{ii} : separat zu besprechen

- vom Problem her:
  - woher kommen Elemente $q_{ij} \neq 0$?
  - welche Werte haben diese Elemente ?

- Beispiel:

(Modell von) Rechensystem,
das im Moment nichts zu tun hat ("leer" ist), Zustand i
in diesem Zustand verharrt, bis neuer Auftrag eintrifft

einziger mögliche Folgezustand zu Zustand i
ist Zustand nach Auftragseingang, Zustand j_1
mit Blick auf (9.1.26) müßte gelten

$\pi_{i,j1}(s) = q_{i,j1} \cdot s + o(s)$
= P[bei Zustand i trifft innerhalb nächster
s Zeiteinheiten genau ein Auftrag ein]

- unabhängig von Zeitpunkt, zu dem Zustand i festgestellt !

  … Diskussion nach (9.1.21)
  nur im Falle exponentiell verteilter
  "Zeit bis zur nächsten Ankunft" möglich !

  bei Poisson'schem Ankunftsstrom (Parameter: λ) gilt,
  P[genau eine Ankunft innerhalb s Zeiteinheiten]
  $= \lambda \cdot s + o(s)$
  fragliches $q_{i,j1}$ hat Wert λ

- (etwas) allgemeiner:
  zu Zustand i zwei unmittelbare Folgezustände (j_1 und j_2)
  Matrixelemente $q_{i,j1}, \neq 0$ und $q_{i,j2} \neq 0$ gefragt (sonstige =0)

  im Problem
  - streben zwei "exponentielle Phasen" ihrem Ende zu, unabhängig voneinander und parallel,
  - Ende der einen Phase (Parameter: λ_1)
    resultiert (Ereignis) in Zustand j_1
    Ende der anderen Phase (Parameter λ_2) in j_2
  - wieder aus
    $\pi_{i,j1}(s) = P[\lambda_1\text{-Phase endet innerhalb s ZE}]$
    $= \lambda_1 \cdot s + o(s)$
    $\pi_{i,j1}(s) = q_{i,j1} \cdot s + o(s)$
    Matrixelement $q_{i,j1} = \lambda_1$
    analog $q_{i,j2} = \lambda_2$

- aus Beispielen:
  Elemente Q-Matrix aus (geeignetem!) Problem ablesbar,

  (zumindest Nichtdiagonal-Elemente von Q,
  Diagonalelemente →)

- Diagonalelemente Q

  nach (9.1.12b): bedingte Überg'gs-W'n addieren sich zu 1

(9.1.27) $1-\pi_{ii}(s) = \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(s) \qquad i \quad \mathbf{N}_0$

  mit Grenzbetrachtung (9.1.16b), → Def. Q-Elemente

(9.1.28) $-q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$

  → Hauptdiag.Elemente = negative Summen Nichtdiag.E's
  Zeilensummen Q-Matrix verschwinden

- weitere Interpretation:
  analog zu Ableitung (9.1.26), aus (9.1.27):

$$1-\pi_{ii}(s) = \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(s)$$
$$= s \sum_{j \neq i} q_{ij} + o(s)$$

  mit (9.1.28): $= s \cdot (-q_{ii}) + o(s)$

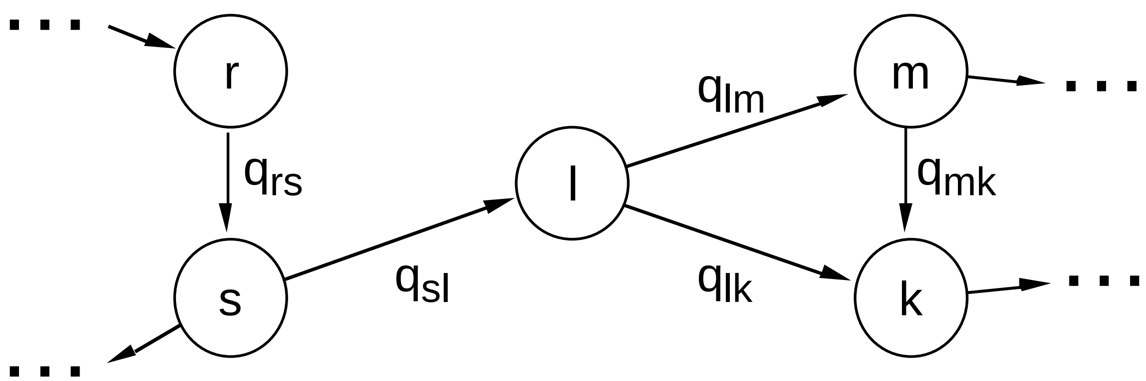
  $\pi_{ii}(s)$ ist W., s ZE nach Antreffen i wieder i vorzufinden
  $1-\pi_{ii}(s)$ ist W., s ZE nach Antreffen i ein $j \neq i$ vorzufinden

  $-q_{ii}$ ist damit Gesamtrate (Intensität),
  mit der Zustand i seinem Ende zustrebt
  "unabhängig von t"
  "Lebenszeit" Zustand i
  kann nur exponentiell (Par.: $-q_{ii}$) sein !

- somit formulierbar:
  Technik Aufstellung Gleichungssystems (9.1.17)
  zur Ermittlung Grenzverteilung
  von homogener, irreduzibler Markoff-Kette

Startpunkt: "Graph der Zustandsübergangsraten"
Knoten: sämtliche Zustände M-Kette
Kanten: sämtl. Möglichkeiten unmittelbarer Übergänge, bezeichnet mit zugehörigen Übergangsraten (Intensitäten, Q-Matrix-Elementen)

z.B.



einzelne Gleichung (9.1.17) (festes i)

$$0 = \sum_j p_j \quad q_{ji} \quad \text{bzw.} \quad -p_i \quad q_{ii} = \sum_{j \neq i} p_j \quad q_{ji}$$

und mit (9.1.28)

$$p_i \quad \sum_{k \neq i} q_{ik} = \sum_{j \neq i} p_j \quad q_{ji}$$

aus Graph der (Zustands-)Übergangsraten direkt ablesbar:

- links Produkt stationäre Zustandswahrsch. Zustand i
  Summe Übergangsraten aus i heraus

- rechts Summe über Produkte aus (jeweils)
  stationäre W. Zustand j (mit: i erreichbar)
  zugehörige Übergangsrate aus j heraus

Mit Benennung "**Wahrscheinlichkeitsfluß**" (W-Fluß)
für Produkt $p. \cdot q.$
dh Zustandswahrscheinlichkeit
mal Austrittsrate aus Zustand

Merkregel für Aufstellung der Gleichungen (9.1.17)

Regel 9.1.29 a: Aufstellung Gleichgewichtssystem

Für jeden Zustand ist
W-Fluß aus diesem Zustand
gleich W-Fluß in diesen Zustand

Beispiel für Zustand l:

$$p_l \cdot (q_{lm} + q_{lk}) = p_s \cdot q_{sl}$$

aus Addition "gewisser" dieser Gleichungen
praktische Erleichterungen

mit Y Z Untermenge der Zustandsmenge:

$$\sum_{i \quad Y} \{p_i \sum_{k \quad Z\backslash Y} q_{ik}\} = \sum_{j \quad Z\backslash Y} \{p_j \sum_{i \quad Y} q_{ji}\}$$

→

Regel 9.1.29 b: Aufstellung Gleichgewichtssystem

Für jede Zustands(unter-)menge ist
W-Fluß aus dieser Zustandsmenge
gleich W-Fluß in diese Zustandsmenge

(enthält keine zusätzliche Information;
führt aber gelegentlich zu einfacheren Gleichungen)

9.2 Kostenmodelle und Entscheidungsprozesse

Beschränkung auf

- zeitdiskrete Markov-Kette (DTMC)
  $(X_r\ ;\ r=0,1,\ldots)$ dh Parametermenge $\mathbf{N}_0$

- mit diskretem Zustandsraum
  RX = {1,2…,I} dh Zustandsram endlich, $\mathbf{N}^+$
  wo nicht abweichend gesagt
  (problemabhängig auch andere Bereiche **N**)

- Übergangsmatrix
  Π I x I - Matrix

9.2.1 Einfache Kostenmodelle

Seien mit Besuch eines Zustands i RX
Belohnungen / Bestrafungen, Erlöse / Kosten, …
verbunden in Höhe von
C(i) i {1,2…,I} unabhängige ZV
mit i-spezifischen Verteilungen

mit Erwartungswert
c(i) := E[C(i)] deterministische Kosten
trivialerweise enthalten
$\mathbf{c} := (\ c(1),\ldots,c(I)\ )^T$ Kosten-(Erwartungswert-)Vektor

Interesse liegt auf Ermittlung

- Erwartungswert Gesamt"kosten" des Prozesses

- bei endlichem / unbeschränktem "Planungshorizont"

ENDLICHER HORIZONT

- seien (naheliegenderweise)
  - Gesamtkosten Prozeß
  - bei endlichem Planunghorizont n
    := Anfangsabschnitt (X_r ; r=0,1,…,n) des Prozesses

  definiert als Summe der Besuchskosten

  $$C_n := \sum_{r=0}^{n} C(X_r)$$

  $$c_n := E[C_n] = \sum_{r=0}^{n} E[C(X_r)]$$

  dh offensichtlich rückführbar auf Anzahl Besuche i RX

- bezeichne
  - $N_j(n)$ (ZV !)
    die Anzahl der Besuche Zustand j
    bei Planungshorizont n
  - $m_{ij}(n) := E[N_j(n) \mid X_0=i]$
    den Erwartungswert der Anzahl Besuche j
    bei Planungshorizont n
    bei Anfangszustand i
    = **Belegungszeit** j bei PH n bei AZ i
  - $\mathbf{M}(n) := (m_{ij}(n) \text{ ; } i,j \;\; RX)$ I x I - Matrix
    die **Belegungszeitmatrix**

Satz 9.2.01 : Belegungszeitmatrix + Übergangsmatrix

Es gilt

$$\mathbf{M}(n) = \sum_{r=0}^{n} \Pi^r$$

fixiere Besuchszustand j Anfangszustand i

definiere Z_r ; r=0,1,…,n ZVs

gemäß $Z_r=1$ für $X_r=j$

$Z_r=0$ für $X_r \neq j$

$$N_j(n) = \sum_{r=0}^{n} Z_r$$

$$\begin{aligned} m_{ij}(n) &= E\left[N_j(n) \mid X_0=i\right] \\ &= \sum_{r=0}^{n} E\left[Z_r \mid X_0=i\right] \\ &= \sum_{r=0}^{n} P\left[Z_r = 1 \mid X_0=i\right] \\ &= \sum_{r=0}^{n} P\left[X_r = j \mid X_0=i\right] \\ &= \sum_{r=0}^{n} \pi_{ij}^{(r)} \end{aligned}$$

Behauptung

- zurück zu den Kosten

- bezeichne

$$g(i,n) := E\left[\sum_{r=0}^{n} C(X_r) \mid X_0=i\right]$$

den Erwartungswert der Gesamtkosten, bei AZ i

$$\mathbf{g}(n) := (g(1,n),\ldots,g(I,n))^T$$

den zugehörigen Vektor

Satz 9.2.02 : Gesamtkosten + Belegungszeitmatrix

Es gilt

$$\mathbf{g}(n) = \mathbf{M}(n) \cdot \mathbf{c}$$

nach Definitionen ist

$$\begin{aligned} g(i,n) &= \sum_{r=0}^{n} E\left[C(X_r) \mid X_0=i\right] \\ &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{j=1}^{I} E\left[C(X_r) \mid X_r=j\right] \; P\left[X_r=j \mid X_0=i\right] \\ &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{j=1}^{I} c(j) \;\; \pi_{ij}^{(r)} \\ &= \sum_{j=1}^{I} \left\{ \sum_{r=0}^{n} \pi_{ij}^{(r)} \right\} \; c(j) \\ &= \sum_{j=1}^{I} m_{ij}(n) \;\; c(j) \end{aligned}$$

Behauptung

insgesamt:

Erwartungswert Gesamtkosten
für endl. Planungshorizont n
bei Anfangsverteilung $\mathbf{p}(0)$
(deterministischer Anfangszustand trivialerweise enthalten)
gegeben als

(9.2.03)
$$c_n = \mathbf{p}^T(0) \; \mathbf{g}(n) = \mathbf{p}^T(0) \; \mathbf{M}(n) \; \mathbf{c} = \mathbf{p}^T(0) \sum_{r=0}^{n} \Pi^r \; \mathbf{c}$$

ist also aus
Anfangsverteilung
Übergangsmatrix
Kostenvektor
berechenbar ("nur noch Rechnerei")

UNBESCHRÄNKTER HORIZONT

- Gesamtkosten Prozeß
  bei endlichem Planunghorizont n
  definiert als Summe der Besuchskosten

$$C_n := \sum_{r=0}^{n} C(X_r)$$

$$c_n := E[C_n] = \sum_{r=0}^{n} E[C(X_r)]$$

wachsen idR mit wachsendem n über alle Grenzen
wie auch zu ihrer Ableitung verwendete

$$g(i,n) := E\left[\sum_{r=0}^{n} C(X_r) \;\middle|\; X_0=i\right]$$

- Ausweg "Diskontierung"

  hier üblicherweise aber Betrachtung
  der "langfristigen Kosten pro Zeiteinheit", also der

  $$g(i) := \lim_{n \to \infty} \frac{g(i,n)}{n+1}$$

  und daraus abgeleiteter Größen,
  falls existent

  und (wieder) zu erahnen:
  Zusammenhang mit Anzahl Besuchen in i RX

- bezeichne

  - $N_j(n)$ (wieder) die Anzahl der Besuche Zustand j bei Planungshorizont n

  - $m_j := \lim_{n \to \infty} \frac{E[\, N_j(n) \,]}{n+1}$

    den Grenzwert des relativ. Erwartungswertes von $N_j(n)$
    = langfristige **Belegung** von Zustand j
    ("falls existent", hier und idF)

  - m_j ist langfristiger relativer Anteil von Zeitpunkten (in allen Zeitpunkten)
    zu denen Zustand j vorliegt

    bei (implizit)
    "Dauer des Einnehmens eines Zustandes" = 1 ZE
    der langfristige relative Zeitanteil mit Zustand j

    $m_j = p_j$ (aus Gleichgewichtsverteilung Satz 9.1.09)

    existiert, wenn Gleichgewichtsverteilung existiert

- zurück zu den Kosten

- bezeichne (im Sinne der Vorüberlegungen)

  $\mathbf{m} := (m_1,\dots,m_l)^T$

  den Vektor der langfristigen Belegungen, wegen

  $\mathbf{m} = \mathbf{p}$ (Gleichgewichtsverteilung Satz 9.1.09)

  auch (langfristige) **Belegungsverteilung** genannt

Satz 9.2.04 : Gesamtkosten + Belegungsverteilung

Unter den Gleichgewichtsbedingungen Satz 9.1.09
(irreduzible, aperiodische, rekurrente Markov-Kette)
gilt

- für den Erwartungswert der langfristigen Kosten, je Zeiteinheit, bei Anfangszustand i

  $g(i) = \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{c}$

- sowie, wegen Unabhängigkeit dieses Ausdrucks von i, für den Erwartungswert der langfristigen Kosten, je Zeiteinheit, unabhängig vom Anfangszustand

  $g \equiv g(i) = \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{c}$

nach Definitionen, und unter Verwendung von Satz 9.2.02:

$$
\begin{aligned}
g(i) &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(i,n)}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{l} m_{ij}(n) \quad c(j) \\
&= \sum_{j=1}^{l} \left[\lim_{n\to\infty} \frac{m_{ij}(n)}{n+1} \right] c(j) \\
&= \sum_{j=1}^{l} m_j \quad c(j) \quad \left(= \sum_{j=1}^{l} p_j \quad c(j) \right)
\end{aligned}
$$

Behauptung

9.2.2 Entscheidungsprozesse

Kostenmodelle erlaubten

- Berechnung von Gesamtkosten **g**(n) (E[…] !)
  bei endlichem Planungshorizont n

- Berechnung von langfristigen
  Kosten je ZE g

- bei stochastischer Prozeßentwicklung
  erfaßt durch Übergangsmatrix Π

Möglichkeiten zur "Einwirkung"
(Entscheidungen / Politik)
bisher nicht vorgesehen

Erweiterungen der Prozesse

- zeitdiskrete Markov-Kette (DTMC)
  $(X_r\ ;\ r=0,1,\ldots)$ wie gehabt

- mit diskretem endlichem Zustandsraum
  RX = {1,2…,I} wie gehabt

- mit diskretem endlichem **Aktionsraum**
  RA = {1,2…,K} **neu**
  (Aktionsraum statt Steuerbereich, Benenn'g a. statt u.
  im vorliegenden Kontext üblich)

  wo konkrete Aktion A ZV mit (bedingter) Verteilung,
  charakterisiert mittels (bedingter) Wahrscheinlichkeiten
  f(i,a) i RX, a RA
  $\Sigma_{a\ \ RA}$ f(i,a) = 1 i RX
  also ("Markovsch") allein v. Zust'd i abhängig, nicht von …

  (deterministische Aktionswahl trivialerweise enthalten)

- Prozeßentwicklungen charakterisiert durch (bedingte) (Ein-Schritt-) Übergangswahrscheinlichkeiten

  $\pi_{ij}(a) := P[X_{r+1}=j \mid X_r=i, A_r=a]$ i,j RX, a RA, r=0,1,…

  also ("Markovsch") allein v. Zust'd i abhängig, nicht von …

  erfaßt durch **Menge** von Übergangsmatrizen

  $\{ \Pi(a) \; ; a \quad RA \}$

  mit

  $\Pi(a) := (\pi_{ij}(a) \; ; i,j \quad RX)$ I x I - Matrizen

  Erweiterung

  (Menge $\Pi(a)$'s anstelle einer Π)

Prozeß

$\{ (X_r,A_r) \; ; r \geq 0 \}$

heißt **zeitdiskreter Markovscher Entscheidungsprozeß**

(Discrete-Time Markov Decision Process, DTMDP)

Funktion

$f = \{ f(i,a); i \quad RX, a \quad RA \}$

spielt die Rolle einer **Politik** Einwirkungsmöglichkeit auf Prozeßablauf

Politikdefinition insbesondere

- unabhängig von (Zeit-)Punkt r
- iS Kap. 8: Politik periodenunabhängig,
  Politik **stationär**

- auch Kostenmodell zu erweitern:
  mit Besuch Zustands i RX, bei Wahl Aktion a RA
  Kosten, … entstehend in Höhe von
  C(i,a) i RX, a RA — unabhängige ZV mit (i,a)-spezif. Vert'gen
  mit Erwartungswert
  c(i,a) := E[C(i,a)] — (deterministische Kosten trivialerweise enthalten)
  zusammengefaßt zu **Kostenvektoren**
  c(a) := (c(1,a),…,c(I,a))^T a RA
  bzw **Kostenmatrix**
  C := (c(i,a) ; i RX, a RA) — I x K - Matrix
  Erweiterung
  (Menge **c**(a)'s bzw Matrix **C** anstelle eines **c**)

obzwar notationsaufwendiger,
und ziemlich allgemein (Haupteinschränkung: Markovsch)

- präsentiert definierte DTMDP-Klasse
  nichts "wirklich Neues" - s.Satz 9.2.05 -

- erlaubt aber über die Auszeichnung einer "Politik"
  Einwirkung auf den Prozeßablauf

- und damit, zusammen mit der Kostendefinition,

  ° Politik"variationen" → Gesamtkosten"veränderungen"

  Optimalitätsdefinitionen, Optimierungstechniken

Satz 9.2.05 : DTMDP ist DTMC

Sei $\{ (X_r, A_r) ; r \geq 0 \}$ zeitdiskreter Markovscher Entscheidungsprozeß
mit $RX = \{1,2\ldots,I\}$ endlichem Zustandsraum (Erweiter'g → abzählbar möglich)
$RA = \{1,2\ldots,K\}$ endlichem Aktionsraum (Endlichkeit wesentlich)
$\{\Pi(a) ; a \quad RA\}$ Menge Übergangsmatrizen
und Politik
$f = \{ f(i,a); i \quad RX, a \quad RA \}$

dann ist der Prozeß
$\{ X_r ; r \geq 0 \}$
eine zeitdiskrete Markov-Kette
mit Übergangsmatrix
$\Pi^f := (\pi^f_{ij} ; i,j \quad RX)$

wo $\pi^f_{ij} = P[X_{r+1}=j \mid X_r=i] = \sum_{a \quad DA} f(i,a) \quad \pi_{ij}(a)$

aus Definitionen:

$$P[X_{r+1}=j \mid X_r=i]$$
$$= \sum_{a \quad RA} P[X_{r+1}=j \mid X_r=i, A_r=a] \quad P[A_r=a \mid X_r=i]$$
$$= \sum_{a \quad RA} f(i,a) \quad \pi_{ij}(a)$$

(iS Kap. 8: stationäre Politik
führt zu: zeithomogenem M-Prozeß)

Unter Zuhilfenahme der Ergebnisse aus Abschn. 9.2.1
lassen sich auf dieser Basis Kostenmaße

- Erwartungswert Gesamtkosten, endl. Planungshorizont n, bei Anfangsverteilung **p**(0)
- Erwartungswert langfristige Kosten je Zeiteinheit

ermitteln

Konzentration auf (einfacheren) Langfristfall, auf
langfristige Kostenrate, bei Politik f, G^f

$$G^f := \lim_{n \to \infty} E\left[\frac{\sum_{r=1}^{n} c(X_r, A_r)}{n+1}\right]$$

unter der Annahme,
daß die (dem DTMDP zugeordnete)
DTMC irreduzibel, aperiodisch, rekurrent

so daß DTMC-Grenzverteilung existiert
und (folglich) unabhängig vom Anfangszustand ist

(? so daß auch langfristige Kostenrate existiert
und unabhängig vom Anfangszustand ist ?)

Satz 9.2.06 : Langfristige Kostenrate DTMDP

Sei $\{ (X_r,A_r) \, ; \, r\geq 0 \}$ zeitdiskreter Markovscher Entscheidungsprozeß
mit $RA = \{1,2\ldots,K\}$ Aktionsraum
$\{\Pi(a) \, ; \, a \quad RA\}$ Übergangsmatrizen
und f Politik

sei ferner
$\{ X_r \, ; \, r\geq 0 \}$ induzierte zeitdiskrete M-Kette
irreduzibel, aperiodisch, rekurrent
mit $\mathbf{p}$ Belegungsverteilung

dann ist langfristige Kostenrate G^f,
unabhängig vom Anfangszustand,
gegeben durch

$$G^f = \sum_{i \quad RX} \left\{ p_i \sum_{a \quad RA} f(i,a) \quad c(i,a) \right\}$$

Erwartungswert der Kosten bei Besuch Zustand i ist

$$c(i) = \sum_{a \quad RA} f(i,a) \quad c(i,a)$$

mit Satz 9.2.04 ergibt sich Behauptung

9.2.3 Optimierung von Entscheidungsprozessen
Ausschnitt

Politik f von DTMDPs war konstruiert
zu Zwecken der Einflußnahme auf Prozeßablauf

Optimierungsaufgabe offensichtlich

min	G^f	(bestimme bestes f)
udN	"DTMDP"	(Prozeß analysierbar ioS)

Variation f bedeutet
Variation charakterisierender Parameter von
$f = \{ f(i,a); i \;\; RX, a \;\; RA \}$
also Variation der f(i,a)

bei |RX| = I,
|RA| = K (wie angenommen)

prinzipiell
$I \cdot K$ Entscheidungsvariablen
mit Nebenbedingungen
$\{ f(i,a); i \;\; RX \}, a \;\; RA$ sind K Verteilungen

- Formalisierung unter Einführung
der Größen

$$x_{ia} := p_i \cdot f(i,a) \qquad i \;\; RX, a \;\; RA$$

"künstlich", aber interpretierbar:
langfristiger relativer Anteil der Zeitpunkte,
zu denen Zustand i herrscht **und** Aktion a gewählt

- mit diesen Größen erhält man aus

  $\Sigma_{a \ \ RA}\, f(i,a) = 1$ (Verteilung)

  auch

  $p_i = \Sigma_{a \ \ RA}\, p_i\, f(i,a) = \Sigma_{a \ \ RA}\, x_{ia}$

  und durch Rück-Einsetzen

$$f(i,a) = \frac{x_{ia}}{\sum_{b \ \ RA} x_{ib}}$$

- Zielfunktion G^f läßt sich in Größen x_{ia} umschreiben

$$\begin{aligned} G^f &= \sum_{i \ \ RX} \left\{ p_i \quad \sum_{a \ \ RA} f(i,a) \quad c(i,a) \right\} \\ &= \sum_{i \ \ RX} \sum_{a \ \ RA} p_i \quad f(i,a) \quad c(i,a) \\ &= \sum_{i \ \ RX} \sum_{a \ \ RA} x_{ia} \quad c(i,a) \end{aligned}$$

  als lineare Funktion der x_{ia}

- **p** ist (f-abhängige) Gleichgewichtsverteilung, deren Komponenten

  $p_j = \Sigma_{i \ \ RX}\, p_i\, \pi^f_{ij}$ $\quad$ j RX

  $\Sigma_{j \ \ RX}\, p_j = 1$

  zu wahren haben (Nebenbedingungen!)

- Nebenbeding'n lassen sich in Größen x_{ia} umschreiben

$$\begin{aligned} \sum_{a \ \ RA} x_{ja} &= \sum_{i \ \ RX} \left\{ p_i \quad \sum_{a \ \ RA} f(i,a) \quad \pi_{ij}(a) \right\} \\ &= \sum_{i \ \ RX} \sum_{a \ \ RA} p_i \quad f(i,a) \quad \pi_{ij}(a) \\ &= \sum_{i \ \ RX} \sum_{a \ \ RA} x_{ia} \quad \pi_{ij}(a) \qquad j \quad RX \end{aligned}$$

$$\sum_{i \ \ RX} \sum_{a \ \ RA} x_{ia} = 1$$

  als lineare Gleichungen in den x_{ia}

- als formalisiertes Optimier'gsprobl. ergibt sich insgesamt

(9.2.07) min $\sum_{i\ RX} \sum_{a\ RA} x_{ia}\ c(i,a)$

udN $\sum_{a\ RA} x_{ja} = \sum_{i\ RX} \sum_{a\ RA} x_{ia}\ \pi_{ij}(a) \qquad j\ \ DX$

$\sum_{i\ RX} \sum_{a\ RA} x_{ia} = 1$

$x_{ia} \geq 0 \qquad i\ \ RX,\ a\ \ RA$

ein lineares Optimierungsproblem

- Lösungsmethodik bekannt,
hier allerdings:

  - alles Nebenbedingungs**gleichungen**
    Standardumwandlung Kap.2
    1 Gleichung → Paar von ≤, ≥-Ungleichungenn
    führt zu linearen Anhängigkeiten
    degeneriertem Problem

  - Dimensionalität des Problems idR hoch
    I · K Entscheidungsvariablen
    I + 1 funktionale Nebenbedingungen
    (1 Redundanz enthalten → I Nebenbedggn)

  für Standard LP-"Pakete" dennoch idR unproblematisch

- Lösungsinterpretation
(ggf inkl Überprüfung Existenzbedingungen)
aber erforderlich

  (Teil-)Skizze:

  Lösung LP-Problem liefert

G*	optimaler Zielfunktionswert f. Politik f*
x^*_{ia}	zugehörige Variablenwerte

- bezeichne

$$T := \{ i \quad RX : \Sigma_{a \quad RA} x^*_{ia} > 0 \}$$

- falls T = RX (mit $x_{ia} = p_i \cdot f(i,a)$:
  alle Zustände
  mit Gleichgew-Wahrsch. p_i>0
  haben Aktion(en) zugeordnet)

  ist optimale Politik f* definiert als

$$f^*(i,a) = \frac{x^*_{ia}}{\sum_{b \quad RA} x^*_{ib}}$$

  wo sich weitergehend zeigen läßt, daß
  für festes i genau ein x*(i,a)>0

$x^*_{ia} > 0$	a=a*(i)	ausgezeichnete Aktion
$x^*_{ia} = 0$	a≠a*(i)	

  und folglich

f*(i,a) = 1	a=a*(i)
f*(i,a) = 0	a≠a*(i)

  dh deterministische Politik liefert (bereits) Optimum,
  stochastische Politiken führen nicht zu Verbesserung

- falls T ≠ RX

  schwierigerer Fall, nicht von vornherein "ergebnislos",
  aber detaillierter zu untersuchen (hier nicht diskutiert)

hier: Abbruch

war: "Ausschnitt"

nicht betrachtet:

- kontinuierliche Zeit
- kontinuierliche Zustände
- andere Techniken (Politik-Iteration, …)
- "bias" der langfristigen Kosten (relative Werte, …)
- …

9.3 Wartesysteme

Erinnerung Abschn. 6.3.2. Scheduling-Probleme:

Bearbeitung
- von **Aufträge**
- durch **Maschinen**

Interesse an **Schedules**: Zuordnungen
- von Arbeits-(Zeit-)intervallen
- auf Maschinen (Stationen)
- an Jobs / Tasks (Aufträge / Teilaufträge)

mit Zielrichtung Optimierung von Schedules
hinsichtlich Ziel-(Kosten-)Funktionen wie
- Abschlußzeitpunkten
- Durchlaufzeiten
- Verspätungen
- …

getrennt diskutiert nach
- Ein-Maschinen-Problemen
- Mehr-Maschinen-Problemen
  (mehrere parallele, Flowshop, Jobshop)

immer aber
"unter im Voraus deterministisch festliegenden Informationen"

hier (Einstieg in)
- "im Voraus nur stochastisch festlegbaren Informationen"

bzw (bewußt)
- "nur stochastisch festgelegte Informationen"

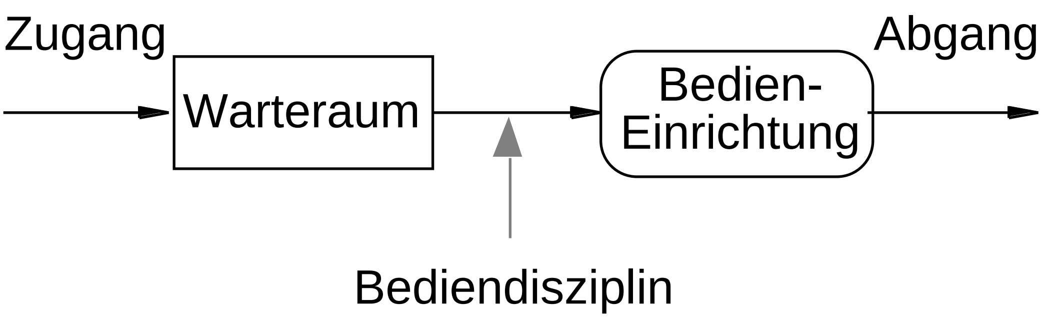
9.3.1 Einzelstationen

Ziel:
- konkrete Stationen untersuchen (Stationen "in Isolation")
- Analysetechniken des Abschn. 9.1.4 einsetzen
  → stationäre Grenzverteilungen der Stationen
- Basis legen für "Vernetzung" von Stationen + Analyse
  (hier nur kursorische Ergebnisse, Abschn. 9.3.2)

Einzelstation:

- Strukturell:
  - Bedieneinrichtung — ein oder mehrere gleichartige Bediener
  - Warteraum — räumlich unbeschränkt
  - Bediendisziplin — regelt Bedienreihenfolge

  sorgt für Erledigung genau der übertragenen Aufträge
  ohne Arbeitsverweigerung / Pausen / …
  =: **arbeitserhaltend**



- Belastung:

  - Strom von "Kunden" mit **Ankunftsabständen** A_k
    unabh. identisch verteilt
    wie ZV A
  - **Bedienwünsche** Kunden S_k
    (ausgedrückt in Bedienzeiten)
    unabh. identisch verteilt
    wie ZV S

erstes / einfachstes System dieser Art:

- genau ein Bediener
- FCFS-Disziplin
- exponentiell (Parameter: λ) verteilte Ankunftsabstände
- exponentiell (Parameter: µ) verteilte Bedienwünsche

mit Kurzbezeichnung ("Kendall-Notation"):

M / M / 1 - FCFS

Bediendisziplin

1 Bediener

Charakterisierung der
Bedienwunschverteilung

Charakterisierung der
Zwischenankunftszeitverteilung
("M" von "Markoff´sch": exponentiell)

Betrachtung in kontinuierlicher Zeit
Charakterisierung Zustand:
n Zahl anwesender Kunden

Frage: Ist $(N_t)_t$ $\mathbf{R}^+$ zeitkontinuierliche, homogene, irreduzible Markoff-Kette,
sodaß (mit Satz 9.1.18) stationäre Grenzverteil'g ermittelbar ?

im einzelnen:

- Zeitkontinuierlichkeit (alle Zeitpunkte t $\mathbf{R}^+$) vorausgesetzt

- stochastische Kette (diskreter Zustandsraum) gegeben,
  Zustandsraum: $\mathbf{N}_0$ (n=0, "leeres System",
  + n=1,2,... sind Systemzustände,
  ohne Grenze: unbeschr. W.raum)

- K. irreduzibel: von beliebigem Zustand n_1 aus
  jeder andere Zustand n_2 durch
  geeignete Anzahl Ankünfte/Abgänge

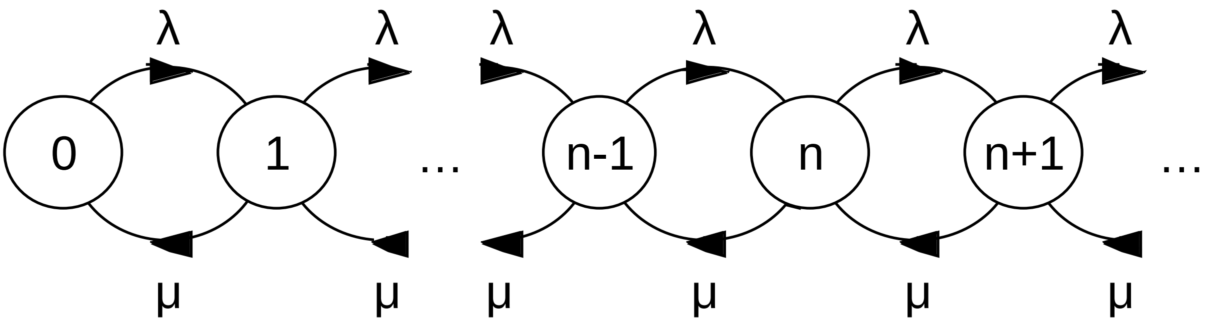
- K. Markoff'sch: bei Kenntnis Zustand n zu t
  weitere Entwicklung festgelegt
  (ohne weitere Kenntnis Vorgeschichte)

  Erläuterung:
  - zu t "läuft" (unabh. von n) **Ank.Intervall**
  - hat exponentielle (Par. λ) "Zukunft"
  - endet in (t,t+s) m. Wahrscheinl. λ s+o(s)
  - führt von Zustand n in Folgezustand n+1
  - Übergangsrate n → n+1
    $q_{n,n+1}=\lambda$ für alle n=0,1,2,...

  - in Zuständen n≥1 "läuft" **Bed.-Intervall**
  - hat exponentielle (Par. μ) "Zukunft"
  - endet in (t,t+s) m. Wahrscheinl. μ·s+o(s)
  - führt von Zustand n in Folgezustand n-1
  - Übergangsrate n (>0) → n-1
    $q_{n,n-1}=\mu$ für alle n=1,2,...

- K. homogen: Feststellungen unabhängig von "t"

  Frage zufriedenstellend beantwortet !
  Elemente der Q-Matrix bereits ermittelt !
  (+ Kenngrößen Übergangsratendiagramm)



Zustandsübergangsratendiagramm enthält
- als Knoten alle Zustände
- als Kanten alle unmittelbar möglichen Zustandsübergänge
- als Kantenbewertung die zugehörigen Übergangsraten

Gleichungssystem (9.1.17) (→ stationäre Verteilung)
mittels Regel 9.1.29a direkt ablesbar:

für Zustand 0: $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
für Zustand 1: $p_1 \cdot (\mu+\lambda) = p_0 \cdot \lambda + p_2 \cdot \mu$
…
für Zustand n: $p_n \cdot (\mu+\lambda) = p_{n-1} \cdot \lambda + p_{n+1} \cdot \mu$

insgesamt:

(9.3.01a) $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
$p_n \cdot (\mu+\lambda) = p_{n-1} \cdot \lambda + p_{n+1} \cdot \mu \quad n=1,2,\ldots$

dazu (9.1.17b):

(9.3.01b) $\sum_{n \ \mathbf{N}_0} p_n = 1$

explizite **Lösung Gleichungssystem** (hier) leicht möglich:

- (9.3.01), leicht umgeschrieben

$$p_1 \cdot \mu - p_0 \cdot \lambda = 0$$
$$p_n \cdot \mu - p_{n-1} \cdot \lambda = p_{n+1} \cdot \mu - p_n \cdot \lambda \qquad n=1,2,...$$

- durch iteratives Einsetzen zunächst

$$p_n \cdot \mu - p_{n-1} \cdot \lambda = 0 \qquad n=1,2,...$$

- woraus, wieder durch iteratives Einsetzen

$$p_n = (\lambda / \mu)^n \cdot p_0$$

mit Abkürzung

$$\rho = \lambda / \mu$$

auch: $p_n = \rho^n \cdot p_0$ $\qquad$ $n=0,1,2,...$

unbekanntes p_0 aus (9.3.01b)

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1$$

unter Voraussetzung (Konvergenz der Summe!): $\rho<1$

$$p_0/(1-\rho) = 1$$

(9.3.02a) $p_0 = 1-\rho$

Insgesamt **Lösung** für M/M/1-FCFS-Station

(9.3.02b) $p_n = \rho^n \cdot (1-\rho)$ $\qquad$ $n=0,1,2,...$

- **geometrische Verteilung** für Zustandsvariable N (Anzahl in stationärer Phase anwesender Kunden)

- Erwartungswert N ("mittlere Kundenzahl"):

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n \, p_n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \, \rho^n$$

$$
\begin{aligned}
E[N] &= (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho\, n\, \rho^{n-1} \\
&= (1-\rho)\,\rho \sum_{n=1}^{\infty} d\rho^{n}/d\rho \\
&= (1-\rho)\,\rho \frac{d}{d\rho}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n}\right] \\
&= (1-\rho)\,\rho \frac{d}{d\rho}\left[\rho/(1-\rho)\right] \\
&= (1-\rho)\,\rho \frac{(1-\rho) - (-\rho)}{(1-\rho)^2}
\end{aligned}
$$

(9.3.02c) $E[N] = \rho/(1-\rho)$

Größe ρ - bisher nur abkürzende Bezeichnung
- besitzt interessante Interpretationen
  zentrale Kenngröße des Systems !

$1/E[A] = \lambda$ mittlere Zahl je ZE Eintreffender
Ankunftsrate
$E[S] = 1/\mu$ im Mittel je Ankunft zu leistende Arbeit

Interpretation:
$\rho = \lambda/\mu$ im Mittel pro ZE eingebrachte
zu leistende Arbeit

"arbeitserhaltende Station" weitere Interpretation:
ρ im Mittel pro ZE von Station
geleistete Arbeit

"Bedienwünsche direkt als Bedienzeiten"
ρ mittl. Tätigkeitszeit Bediener je ZE
Auslastung der Station

- Auslastung immer: **< 1**
- war schon Voraussetzung für "Verteilung"
- physikalische Interpretation hier geliefert:
  wenn pro ZE mehr Arbeit ins System als leistbar,
  kann Warteschlange nur wachsen,
  kann stationäre Phase nicht existieren

weiter mit ρ als Auslastung

$1-\rho$ mittl. **Leerlaufzeit** Bediener pro ZE:
untätig, kein Kunde anwesend
$= p_0$ in statistischer Interpretation

$p_0=1-\rho$ war in (9.3.02a) bereits analytisch abgeleitet

Interpretationen
- für konkretes M/M/1-FCFS-System
- aber weit **allgemeinere Gültigkeit**

• arbeitserhaltende Station,
  gespeist von Kundenstrom mit
  u.i.v. Ank.abständen A, Ankunftsrate λ
  u.i.v. Bedienzeiten S, mittlere Bedienzeit 1/μ

• impliziert vorstehende Aussagen:

$\rho = \lambda/\mu$ im Mittel pro ZE in Station getragene Arbeit

$\rho<1$ wesentliche Voraussetz'g für "stabilen Betrieb"

ρ im Mittel pro ZE durch Station geleistete Arbeit,
Auslastung Station (mittl. Tätigkeitszeit je ZE),

$1-\rho$ mittlere Leerlaufzeit Station pro Zeiteinheit
$\rho+p_0=1$ offensichtlich

---

für "derartige" Systeme (weitere Resultate "später")
- stationäre Verteilung der **Population** (Zahl Anwesender)
- implizierte Größen Auslastung, Leerlaufzeit

mit Techniken aus Abschn. 9.1.4 unschwer ermittelbar

andere Beurteilungsgrößen
- zB (Kunden-)**Verweilzeit** V (von **Ankunft** bis **Abgang**)

nicht unmittelbar zugänglich

---

sehr hilfreiches Resultat liefert

Satz 9.3.03 : Little's Theorem

Für die stationäre Phase eines Wartesystems mit
- mittlerem Ankunftsintervall E[A]
- mittlerer Population E[N]

gilt für die mittlere Kundenverweilzeit E[V]

$$E[V] = E[A] \cdot E[N]$$

betrachte eine Realisierung diverser Prozesse
- Ankunftsprozeß
- Abgangsprozeß
- Populationsprozeß

in einem Ausschnitt (Zeitintervall) der Länge T
aus der stationären Phase eines Wartesystems

Ausschnitt so gewählt, daß er
- bei leerem System (Population = 0) beginnt
- bei leerem System endet
  (Folge von) **busy periods** voll umfaßt

(solche Zeitpunkte, mit endlichem Zeitabstand, existieren
wegen $\rho<1$ $p_0>0$)

bezeichne mit

ZA(T) Anzahl der Ankünfte in diesem Intervall

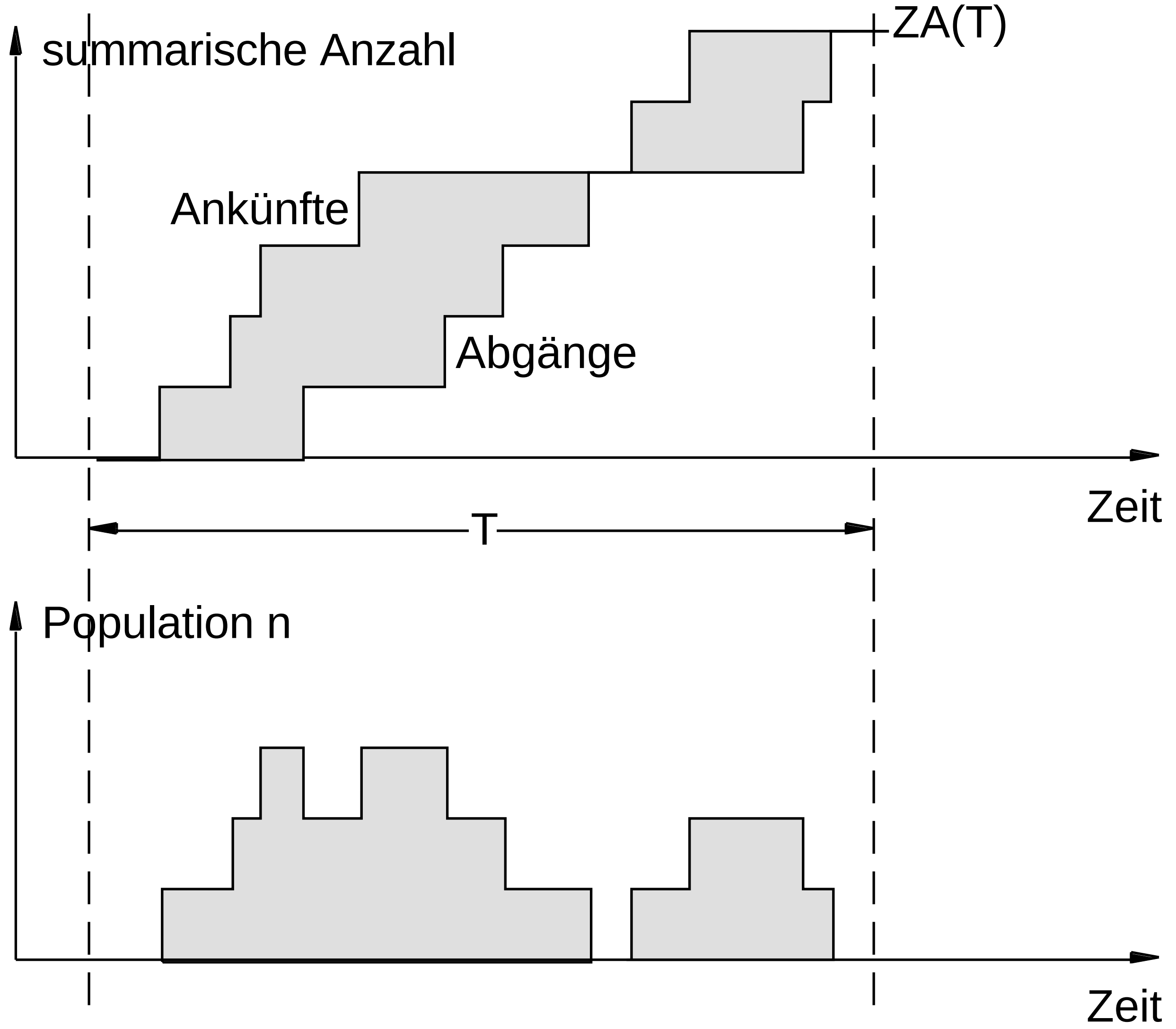
J(T) Gesamtzeit, welche Kunden "am System" sind (s. schraffierte Flächen)

MA(T) := T / ZA(T) mittl. Ankunftsabstand im Interv.

MV(T) := J(T) / ZA(T) mittlere Verweilzeit im Intervall

MN(T) := J(T) / T mittlere Population im Intervall

Veranschaulichung:



aus Definitionen

$$MN(T) = J(T) / T = \{MV(T) \cdot ZA(T)\} / \{ZA(T) \cdot MA(T)\} = MV(T) / MA(T)$$

bei Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{T \to \infty} MA(T) = E[A]$$

$$\lim_{T \to \infty} MV(T) = E[V]$$

existiert auch

$$\lim_{T \to \infty} MN(T) = E[N]$$

Behauptung

$$E[N] = E[V] / E[A]$$

---

mit Little folgt für "unsere" M/M/1-FCFS Station
als mittlere Kundenverweilzeit

$$E[N] = E[V]/E[A] = E[V] \cdot \lambda$$

(9.3.04)
$$E[V] = 1/[\mu \cdot (1-\rho)] = 1/(\mu-\lambda)$$

ähnlich einfach: M/M/1 unter div anderen Bediendisziplinen

Satz 9.3.05 : M/M/1-Stationen + Bediendisziplinen

Stationäre Verteilung Kundenpopulation N
der M/M/1-Station unter Bediendisziplinen

(a) RANDOM: Auswahl aus Warteschlange zufällig
(b) LCFS: Last Come First Served (vollständig)
(c) LCFS-PR: LCFS-Preemptive Resume (unterbrechend)

ist identisch Populationsverteilung FCFS-Disziplin (9.3.02)

siehe Ableitung FCFS

damit ebenfalls identisch: mittlere Verweilzeit (9.3.04)
(**nicht** identisch aber **Verteilung** der Verweilzeit V **!!**)

"skizzenhaft" weiter
(Genaueres: "Leistungsbewertung von R+K-Systemen")

Mit denselben Techniken lassen sich erzielen

- allgemeine Ergebnisse für Stationen
  mit **zustandsabhängiger Arbeitskapazität**
  (bei Anwesenheit i Kunden g_i Arbeitseinh. je ZE geleistet)
  und damit die Spezialfälle
  - M/M/m-FCFS, -RANDOM, -LCFS, -LCFS-PR
  - M/M/∞ "Infinite Server" (IS), "pure delay"
  - M/M/1-PS "Processor Sharing"(PS)
  - M/M/m-PS "Processor Sharing"(PS)

- allgemeine Ergebnisse für
  nicht-exponentielle Bedienzeiten
  (Erlang-, Phasen-Verteilungen: "praktisch alle") für
  - RANDOM-, LCFS-, LCFS-PR-Disziplinen
    auch für zustandsabhängige Arbeitskapazitäten
  - **nicht** für FCFS !

- Erweiterungen obiger Ergebnisse für
  mehrere Kunden-Klassen: mehrere Ankunftsströme mit
  - spezifischen Ankunftsabständen
  - spezifischen Bedienzeiten

- gewisse Erweiterungen
  für **nicht-exponentielle Ankünfte**

9.3.2 Stationsnetze
Grobskizze

- bzgl Abschn. 6.3.2. (Scheduling-Probl.) bisher betrachtet:
  - Ein-Maschinen-Probleme
  - implizit Mehr-Maschinen-Probleme
    mit mehreren parallelen Maschinen

- Mehr-Maschinen-Probleme
  der Flowshop / Jobshop-Typen
  waren charakterisiert durch

  - mehrere Maschinen

  - Jobs, in Tasks unterteilt,
    mit vorgeschriebener Zuordnung Task / Maschine
    und bekannter Bearbeitungsdauer,
    in Varianten

  ° Flowshop: Task-Reihenfolge für alle Jobs identisch
  ° Jobshop: Task-Reihenfolge nicht notwendig identisch

- hier erfaßt durch ("Modellwelt", "Paradigma"):
  Verkehrsnetze

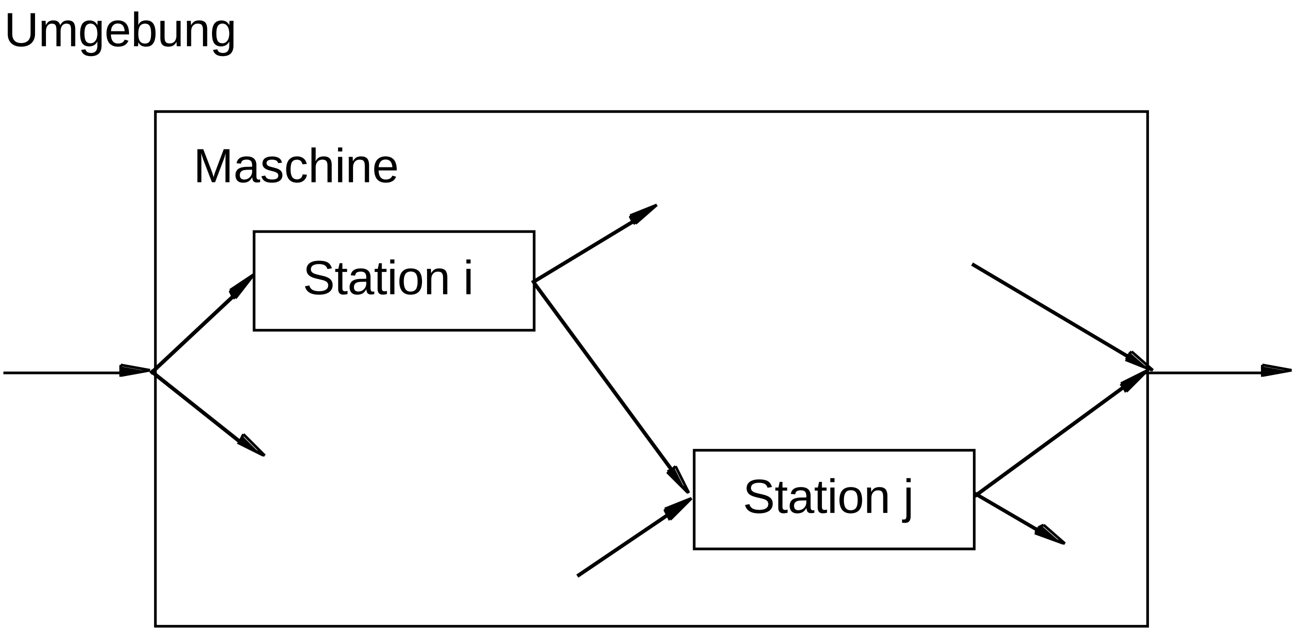
VERKEHRSNETZE

zwei Komponenten: "**Maschine**" und "**Last**"

- Maschine (zeitlich fester) gerichteter Graph

- Last (oft zeitlich variierende) Menge von Prozessen

- **Maschine** besteht aus
  - Menge von "Betriebsmitteln"
    ("Ressourcen", "Funktionseinheiten", "Stationen")
  - Menge von "Übergangsmöglichkeiten"
    ("Verbindungen", "Wegen") zwischen Paaren BMs
  - graphisch darstellbar als Netz aus Stationen



Betriebsmittel: "Station i" , "Station j" , …
\+ Übergangsmöglichkeiten
- zwischen Stationen,
- aus Maschine (von BMs) in Umgeb'g ("Rest der Welt")
- aus Umgebung in Maschine (zu BMs)

- **Last** besteht aus
  - Menge von "Prozessen"
    ("Lasteinh.", "Aufträgen", "Tasks", "Jobs", "Kunden")
  - Prozeß (statisch)
    Menge von BM-Anforderungen (je für Einzel-BM)
    \+ Reihenfolgevorschrift (zeitl. Ordnung über BM-Anf.)
    (BM-Anforderung, Reihenfolgevorschrift zu detaillieren)

- Statische Charakterisierung Prozeß ist Verhaltensvorschrift ("**Prozeßmuster**")

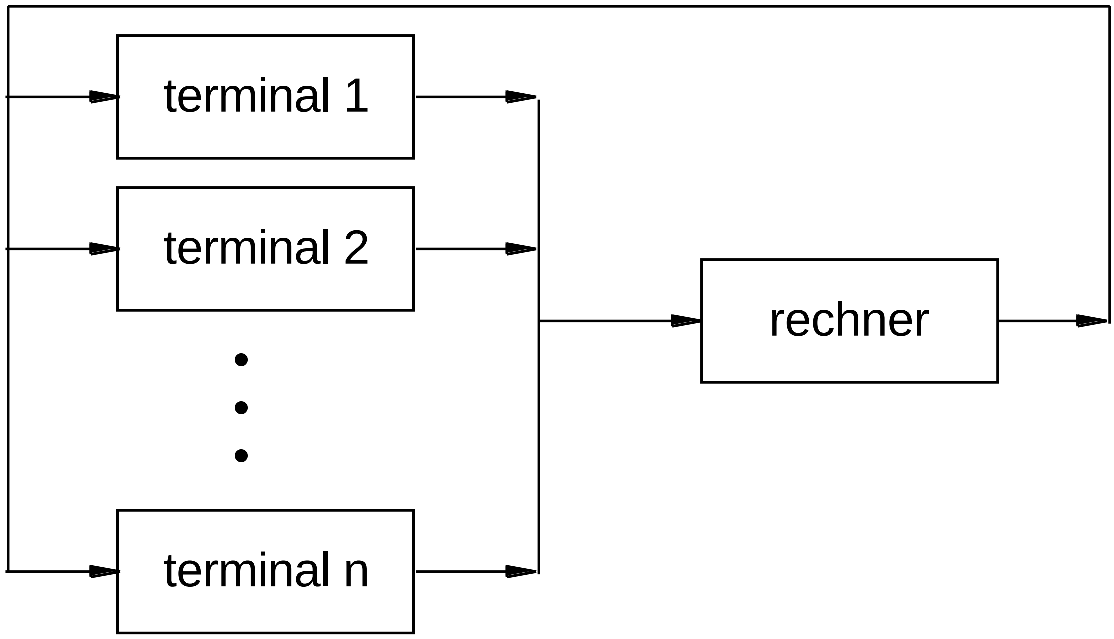
- **Prozeß** (dynamisch) entsteht, wenn
  - Maschine Prozeßmuster als Arbeitsauftrag versteht,
  - BM-Anf'g nach BM-Anf'g in geforderter Folge erfüllt

- "Entstehung" Prozeß (in dieser Modellwelt)
  - Umgebung generiert Prozeß,
    überantwortet ihn der Maschine - jetzt existent
    ("Produktionsauftrag", "Bestellung", "Benutzer")
    Prozeß wird irgendwann terminieren
    Prozeß "**temporär**"
    System/Modell "**offen**"
  - Prozeß weder generiert noch terminiert,
    existiert "dauernd" (Reihenfolge irgendwie zyklisch)
    Prozeß "**permanent**"
    System/ Modell "**geschlossen**"

Zur Veranschaulichung:

Verkehrsnetze häufig - ohne genauere Erklärung - eingesetzt in Bereichen
- Produktion, Logistik, …
- Rechnerarchitektur, Betriebssysteme, Kommunikation, …

Beispiel Teilnehmerrechensystem
- Maschine 1 Rechner
  n Terminals
- Last (an jedem Terminal: Benutzer)
  bereitet Auftrag vor,
  beauftragt Rechner → Rechner arbeitet
  antwortet
  … von vorne



n+1 Stationen: Endgeräte terminal i (i=1,2,...,n) + rechner
+ Übergangsmöglichkeiten:
terminal i nach rechner,
rechner nach terminal i (i=1,2,...,n)
Modell ist geschlossen
Stationen sind formal zu charakterisieren

Geschilderte Verhaltensregelmäßigkeiten
(je Benutzer terminal - rechner - terminal - …)
sind "Prozeßmuster"
Prozeßmuster sind formal zu erfassen

Für spezifische Klassen stochastischer Verkehrsnetze
- (pseudo-)explizite analytische Ergebnisse erzielbar
- effiziente Berechnungsalgorithmen bekannt

Entwicklungshistorie in zwei (großen) Stufen
- "exponentielle" Netze (Jackson + Gordon/Newell)
- "separable" Netze (Baskett/Chandy/Muntz/Palacious)

Definition 9.3.06 : Exponentielle Netze

(a) Spezifikation Maschine

- M Stationen; Stationsmenge I = {1,2,...,M}
  (uU Umgebung als Pseudo-Station "0")
- Stationen unbegrenzter (räumlicher) Kapazität
- Einzelstation i charakterisiert durch
  "Geschwindigkeitsvektor" $\underline{g}_i = (g_i(1), g_i(2),...)$
  $g_i(n)$: zeitliche Gesamtarbeitskapazität Station bei Anwesenheit von n Kunden
- Stationen bedienen nach einer der Disziplinen
  FCFS, LCFS, RANDOM oder LCFS-PR
- Kundenzugänge / Kundenabgänge bzgl. Umgebung
  an jeder Station möglich
- Wechsel Kunden von jeder zu jeder Station zugelassen

(b) Spezifikation Last

- System offen oder geschlossen
- bei offenem System Kundenankünfte
  entsprechend Poisson-Strom, Parameter λ
- bei geschlossenem System keine Ankünfte ($\lambda = 0$),
  permanent N Kunden anwesend
- Kundenbewegungen entsprechend "Wechselmatrix"
  H = (h(i,j)) (routing matrix)
  h(i,j) P[Bedienung i $\rightarrow$ Bedienung j]
  H gehorcht "Zusammenhangsbedingung":
  jede Station von jeder mit endlicher Wahrsch.erreicht
  (direkt oder indirekt, + unter Einschluß Umgeb'g)
- an Station i ankommender Kunde
  hat exponentiellen Bedienwunsch, Parameter μ_i
- alle stochastischen Größen voneinander unabhängig

• + analoge Erweiterungen für
  mehrere verschiedene "Muster" ("Ketten")

Untersuchung mit Mitteln des Abschn. 9.1.4
auf Basis von

- Stationszuständen: Stationspopulation n_i

- Netzzuständen: $\mathbf{z}: = (n_i; i \quad I) = (n_1, n_2, ..., n_M)^T$

    Netz-Zustandsraum

(9.3.07) $Z = \times_{i \quad I} \mathbf{N}_0$ bei offenem System

$Z = \{\mathbf{z}: \sum_{i \quad I} n_i = N\} \quad \times_{i \quad I} \mathbf{N}_0$ bei geschl. System

Ergebnis der Analyse exponentieller Netze
einfach und "überraschend":

als ob Stationen unabhängig voneinander arbeiteten,
unter Belastungsströmen,
welche aus simpler Überlegung
zu "Verkehrsgleichgewicht"
"soviel rein wie raus" stammen

Analoga zu (folgendem) Satz 9.3.08 existieren

- für Exponentielle Netze im Mehr-Ketten
  + (Mehr-Klassen, …) Fall

- für "Separable Netze":
  allgemeinere Bedienwunsch-Verteilungen
  (**nicht** für alle Stationstypen !)

Genaueres s. Warteschlangennetze,
Leistungsbewertungs von R+K-Systemen

(auch: Verkehrstheorie der Nachrichtentechnik)

Satz 9.3.08 : Exponentielle Netze (Ein-Ketten-Fall)

sei
- Netz "exponentiell" gemäß Definition 9.3.06
- mit Zustandscharakterisierung gemäß 9.3.07
- $\lambda = (\lambda_i; i=1,2,...,M)^T$ Lösungsvektor des linearen Gl'systems

$$\lambda_i = \sum_{j \quad I} \lambda_j \quad h(j,i) + \lambda \quad h(0,i) \qquad i \quad I$$

bezeichne
- $\mathbf{P}_i := (P_i(n); n \quad \mathbf{N}_0) \qquad i \quad I$

wo $P_i(n) := P[n_i=n]$

stationäre Verteilung (s.Abschn. 9.3.1) isolierter Station i,
- ° betrieben mit Poisson-Strom (Parameter λ_i)
- ° und exponentiellen Bedienwünschen (Parameter μ_i)

dann hat stationäre Verteilung Netzzustand (falls existent) Form

$$P[\mathbf{z}] = \prod_{i \quad I} \left[P_i(n_i)\right] / G \qquad \mathbf{z} \quad Z$$

wo $\mathbf{z}=(n_i; i \quad I)$

G "Normalisierungskonstante" $\quad \Sigma P[\mathbf{z}] = 1$

und G = 1 im offenen Netz

oB

- Lösung insgesamt "Produktform", "wie unabhängig arbeitende Stationen" (ist sicher nicht der Fall)

Abbruch

LEER

LEER